

DYNAMISCHE UNTERSUCHUNG MATHEMATISCHER ZUSAMMENHÄNGE

von Prof. André Mössner, Dipl. Math. ETH, Kantonsschule Trogen

Mit Hilfe geeigneter Software kann man den Schülerinnen und Schülern im Gymnasium auf spielerische Art den Begriff des Parameters näher bringen:

Welche geometrische Bedeutung hat ein Parameter in einer Funktionsgleichung?

Welche Bedeutung können Parameter bei Gleichungen allgemeiner Kurven haben?

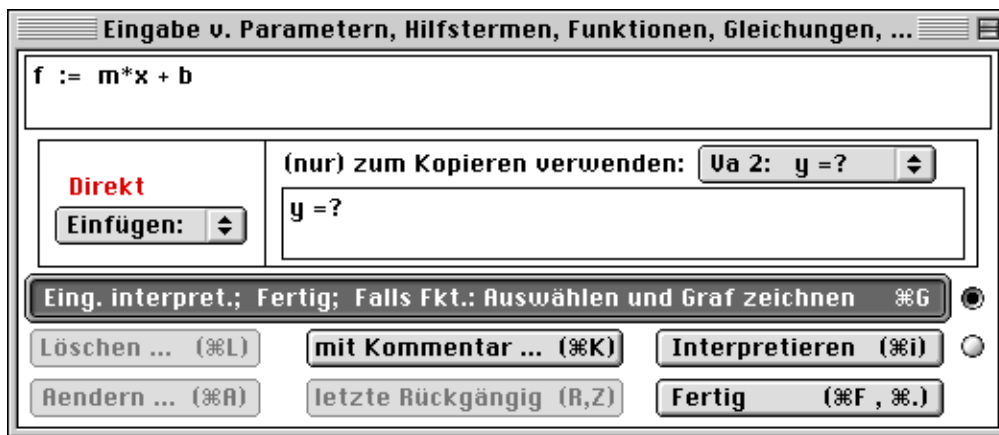
Solche und ähnliche Fragen lassen sich mit der mathematischen Grafiksoftware "MacFunktion" sehr einfach untersuchen. Das Thema eignet sich hervorragend für **individualisierten Unterricht**, bei welchem die Lernenden in ihrem eigenen Tempo forschen können.

Diese Anleitung sowie die erforderlichen Dokumente können Sie herunterladen bei www.macfunktion.ch/mus

Zur Verwendung im Unterricht müssten die folgenden Anleitungen selbstverständlich ausführlicher gestaltet werden. *Es handelt sich im Folgenden bloss um Skizzen!*

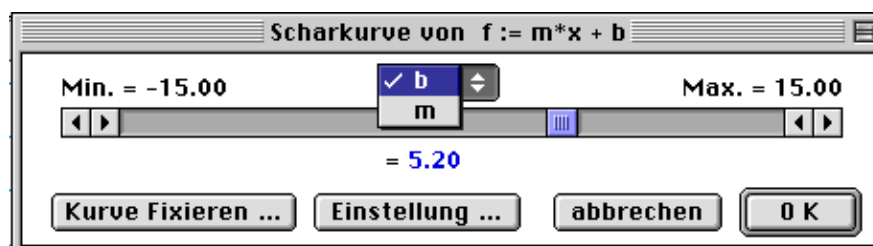
1 Kurzanleitung für MacFunktion

- Starten Sie *MacFunktion*.
- Eingabe von Parametern: Den verwendeten Parametern muss zuerst ein provisorischer Wert gegeben werden, bevor man sie brauchen kann.
Beispiele: $m := 2$ oder $b := -7.5$ etc.
- Eingabe der Funktionsgleichung geht gleich wie die Eingabe von Parametern.
Achtung: Als Funktionsname dürfen Sie *nicht* y verwenden!
Beispiel: $f := m \cdot x + b$ (Der Malpunkt muss geschrieben werden)



Klicken Sie anschliessend auf ... *Graph zeichnen* .

- Wählen Sie nun den Befehl *Graph* → *Scharcurve von ...* . Dort wählen Sie zuerst aus dem Menü den gewünschten Parameter und ändern anschliessend dessen Wert per Schieberegler ...



2 Die Lineare Funktion

$$y = m \cdot x + b$$

Grundlagen:

- Der Graph einer linearen Funktion hat die Gleichung $y = m \cdot x + b$
- m und b sind **Parameter**, welche man als gegebene Zahlen betrachtet.
- Zu gegebenem x -Wert kann man mit dieser Gleichung den Funktionswert y berechnen.
- Die Zahlenpaare (x/y) , welche die Gleichung erfüllen, stellen Punkte im Koordinatensystem dar.
- Die Menge aller dieser Punkte bilden den Graphen der Funktion.

Frage:

Welche geometrische Bedeutung haben die Parameter m und b ?

Anleitung:

Öffnen Sie das (heruntergeladene) Dokument *lineare Funktion*.

Wählen Sie den Befehl *Graph* \rightarrow *Scharkurve von ...* und variieren Sie die Werte der beiden Parameter per Schieberegler. Beobachten Sie, wie sich dabei der Graph verändert.

3 Die quadratische Funktion

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

- Der Graph einer quadratischen Funktion hat im allgemeinen Fall die Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (Typ A)
- Diese Gleichung lässt sich auch in der Form $y = a \cdot (x - u)^2 + v$ (Typ S) oder in der Form $y = a \cdot (x - d) \cdot (x - e)$ (Typ N) schreiben.
- a, b, c, u, v, d und e sind Parameter, welche man als gegebene Zahlen betrachtet.

Fragen:

- Welche geometrische Bedeutung haben die Parameter a, c, u, v, d und e ?
- Bedeutet der Parameter a in allen drei Gleichungstypen geometrisch das gleiche?

Anleitung:

Öffnen Sie eines der (heruntergeladenen) Dokumente *quadratische Funktion A* bzw. *quadratische Funktion S* bzw. *quadratische Funktion N* für die drei Gleichungstypen. Wählen Sie den Befehl *Graph* \rightarrow *Scharkurve von ...* und variieren Sie die Werte der Parameter per Schieberegler. Beobachten Sie, wie sich dabei der Graph verändert.

Hinweise:

- Die geometrische Bedeutung des Parameters b ist leider *nicht* direkt erkennbar.
- Die drei angegebenen Gleichungstypen A, S, N lassen sich algebraisch ineinander umformen.

4 Harmonische Schwingung

Gleiche Fragestellungen wie oben zur Gleichung

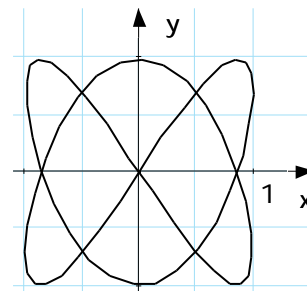
$$y = a \cdot \sin(w \cdot (x + d)) \quad \dots$$

5 Lissajouskurven

Für die Koordinaten eines Kurvenpunktes $P(x/y)$ gilt: $x(t) = a_1 \cdot \sin(w_1 \cdot t + d_1)$

$$y(t) = a_2 \cdot \sin(w_2 \cdot t + d_2)$$

Die Bedeutung der Parameter $a_1, a_2, w_1, w_2, d_1, d_2$ lässt sich wie vorher durch



Variieren untersuchen.

Zu jedem Wert des (Kurven-) Parameters t gehört ein anderer Kurvenpunkt. Welcher?

Vektorielle Gleichungen von Kurven gibt man bei *MacFunktion* mit dem rechts abgebildeten Befehl ein.

Eingabe	KoordSyst	Gra
Eingeben...		⌘E
Polarkurve...		⌘L
Parameterkurve...		⌘'

Aktivieren Sie anschliessend den Befehl *Graph* --> *ParameterKurven-Lineal* um zu verfolgen, welcher Kurvenpunkt zu welchem Parameterwert t gehört.

--> Verwenden Sie das Dokument *Lissajous* !

6 Rollkurven

Wir betrachten einen Kreis, welcher längs einer Geraden oder längs eines anderen Kreises abrollt. Dabei betrachten wir einen Punkt, der auf dem bzw. am rollenden Kreis befestigt ist. Frage: Auf welcher Kurve bewegt sich dieser Punkt?

Diese Fragestellung eignet sich hervorragend, um die Themen Vektorgeometrie, Trigonometrie, Algebra und allenfalls Analysis miteinander in Verbindung zu bringen. Im Unterricht sollen die Lernenden die folgenden Gleichungen *selbst* berechnen!

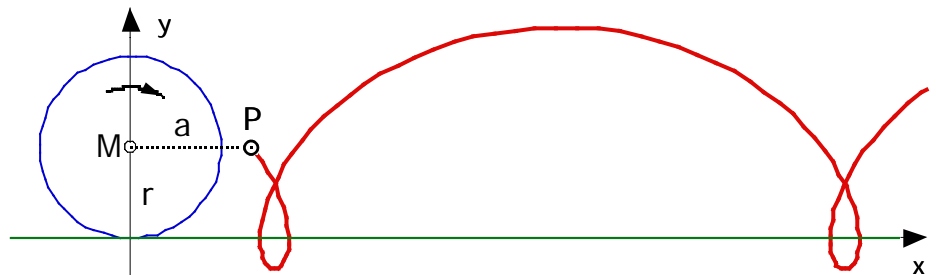
6.1 Der Kreis rollt auf einer Geraden

Der zu verfolgende Punkt habe den Abstand a vom Mittelpunkt des rollenden Kreises mit Radius r . t ist der "Kurven-Parameter".

$$\begin{aligned} x &= r \cdot t + a \cdot \cos(t) \\ y &= r + a \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

Dokument *Zykloide*.

Variieren Sie den Parameter a !

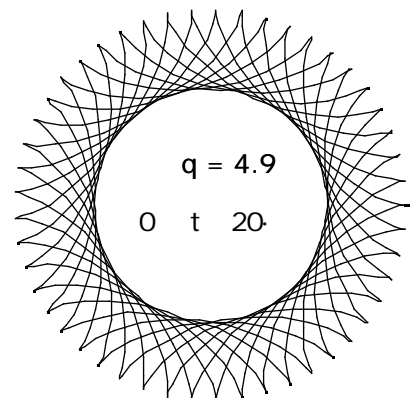
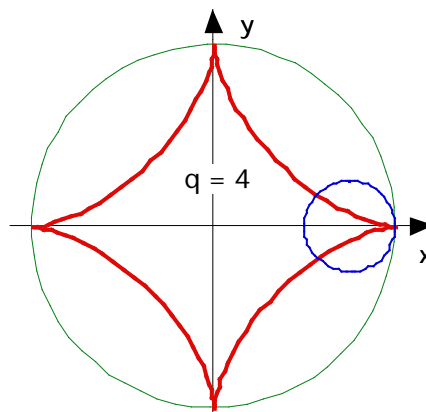


6.2 Der Kreis rollt im Inneren eines anderen Kreises

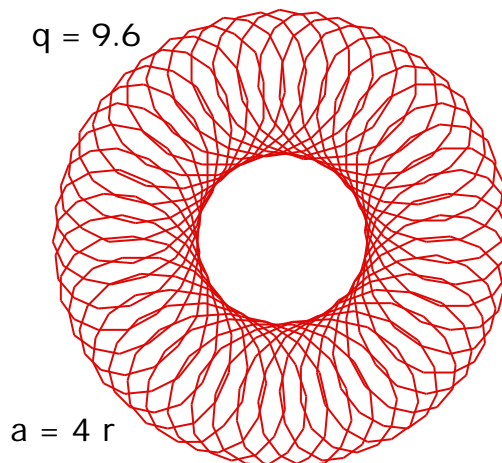
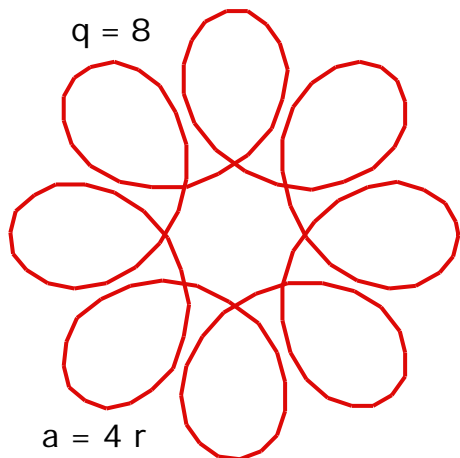
r ist der Radius des rollenden Kreises, $q \cdot r$ ist der Radius des grösseren Kreises.

$$\begin{aligned} x &= r \cdot (q - 1) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos((1 - q) \cdot t) \\ y &= r \cdot (q - 1) \cdot \sin(t) + a \cdot \sin((1 - q) \cdot t) \end{aligned}$$

In den nebenstehenden Beispielen wurde $a = r$ gewählt.



Verwenden Sie das Dokument *Hypozykloide*.
 Variieren Sie die Werte der Parameter q und a !

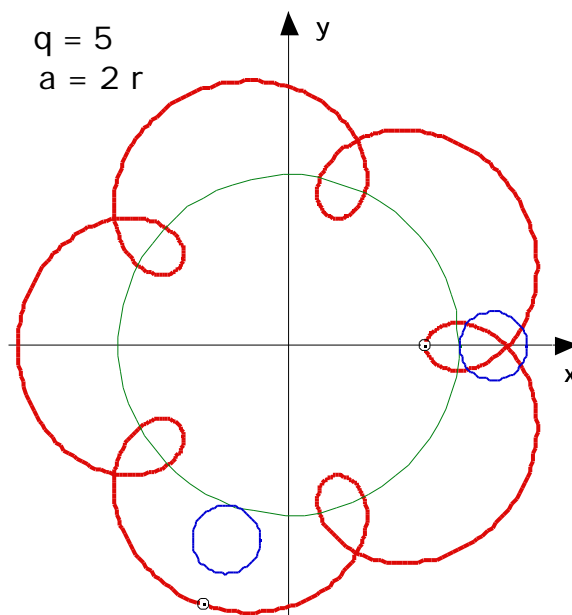
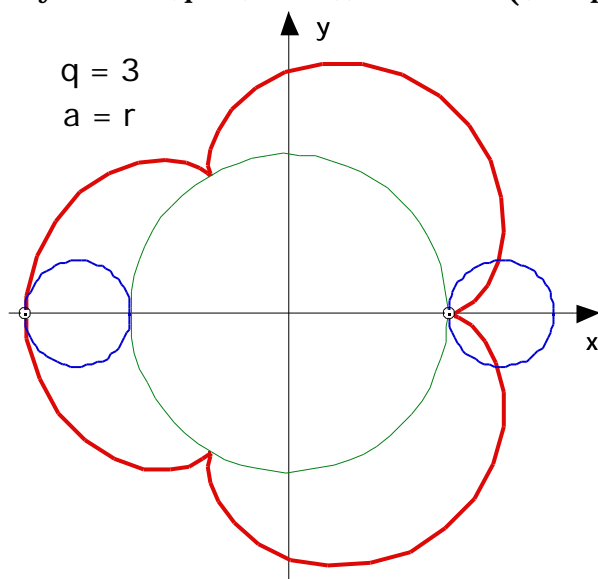


6.3 Der Kreis rollt aussen um einen anderen Kreis

Nach längerer Rechnung findet man die Kurvengleichung (\rightarrow Epizykloide)

$$x = r \cdot (q + 1) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos((1 + q) \cdot t)$$

$$y = r \cdot (q + 1) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin((1 + q) \cdot t)$$



7 Permanente Angebote für Lehrende und Lernende

www.macfunktion.ch/unterricht/index.html

www.macfunktion.ch/links/ex.html

www.macfunktion.ch/links/vortrag.html

www.macfunktion.ch/links/darstellung.html

www.macfunktion.ch/links

www.macfunktion.ch/links/lehrer.html

(Unterrichtsmethoden ...)

(Tipps für Prüfungen)

(Tipps für Vorträge)

(Tipps für gute Darstellung)

(Linksamml. für Schüler und Lehrer)

(Linksammlung für Lehrkräfte)

www.macfunktion.ch (**Gratis-Demoversion und Informationen zu MacFunktion**)