# Individualisierter Unterricht

## Praxisbericht

von

André Mössner
Dipl. Math. ETH
Kantonsschule Trogen, Gymnasium
CH - 9043 Trogen AR
andre.moessner@kst.ch

Mit Freude unterrichten

Mit Freude lernen

**1 Einleitung.....2**

**2 Wie individualisiere ich meinen Unterricht?.....2**

**3 Eigene Lehrmittel und Skripts.....6**

**4 Immer wieder gestellte Fragen.....8**

**5 Mathematische "Medizin".....10**

**6 Darstellung von Schülerarbeiten.....13**

**7 Schreiben von Lehrmitteln.....15**

**8 Schlussbemerkungen.....18**

**9 Beilagen.....ab 20**

Vortrag am WBZ-Kurs vom 1. März 2004 in Zürich

# 1 Einleitung

*Im Folgenden sind immer beide Geschlechter gemeint, auch wenn die Formulierungen nicht geschlechtsneutral sind.*

Im Laufe der Zeit habe ich ein Unterrichtskonzept entwickelt, welches sich immer mehr weg von der Wandtafel und hin zu individualisiertem Unterricht bewegt hat. Heute ist der grösste Teil meines Unterrichts individuelle Schülerarbeit.
Ich arbeite vorwiegend mit selbst geschriebenen Lehrmitteln, welche ich auf die jeweilige Klasse "zuschneidere".
Der vorliegende Erfahrungsbericht schildert die Entwicklung und den heutigen Stand meines Unterrichtskonzepts. Er enthält viele Tipps aus meinem Erfahrungsschatz.

## 1.1 Vorteile des individualisierten Unterrichts

- Eine hohe Schülerbeteiligung ("100%" der Schüler denken mit)
- Erhöhte Motivation und besserer Lernerfolg
- Vorbereitung für lebenslanges Lernen
- Förderung der Teamfähigkeit
- Individuelles Arbeitstempo
- Kaum Probleme mit Niveau-Unterschieden
- Ein Zeit-*Gewinn*
- Nur selten Disziplin-Probleme

## 1.2 Persönliche Erfahrung

- Bei individualisiertem Unterricht kommt es vor, dass meine Schüler die Pause vergessen oder die Glocke am Schluss des Unterrichtsblocks nicht hören.
- Die individualisierten Lektionen sind für mich weniger anstrengend als Frontalunterricht, was sich besonders an "langen" Schultagen bemerkbar macht.
- Der Preis dafür ist ein eher hoher Vorbereitungsaufwand. Dieser wird durch die grössere Befriedigung im Beruf wieder kompensiert.

# 2 Wie individualisiere ich meinen Unterricht?

## 2.1 "Frage-Antwort-Spiel" vermeiden

- "Wie ist der Sinus definiert?"
  Die Schüler hassen nichts so, wie derartige unechte Fragen. Oft ist es ihnen auch zu blöd, auf Fragen zu antworten, von denen der Lehrer die Antwort schon weiss.

Gewöhnlich denkt bei solchen unechten Fragen nur ein kleiner Teil der Klasse über die gestellte Frage nach. Die anderen bleiben gedanklich passiv im Vertrauen, dass ein Kollege die richtige Antwort geben wird.

- Die Regeln beim "Frage-Antwort-Spiel" sind die, dass die Lernenden *erraten* sollen, welche Antwort der Lehrer jetzt erwartet. Sie lernen dabei mehr über "Lehrerpsychologie" als über Mathematik. Oft passiert es sogar, dass auf richtige Antworten nicht eingegangen wird, weil der Lehrer einen anderen Lösungsweg im Kopf hat: Peinlich.
- Bei der Technik des "Frage-Antwort-Spiels" werden oft unbeabsichtigt einzelne Lernende vor den anderen blossgestellt. Nach K. Frey (ETH) weist diese Technik nur eine geringe Effektstärke auf.

## 2.2 Alternative

- Ich gebe nach einer gestellten Frage eine Minute Zeit zum Nachdenken/Rechnen (schmunzelnd gebe ich bekannt: "Ich werde die Lösung von euch abschreiben"). Anschliessend liefere ich die Antwort selbst. Dadurch denken fast alle aktiv mit.
  **Tipp**: Es lohnt sich, dabei durch die Reihen zu spazieren. Viele Schüler beginnen erst zu schreiben, wenn der Lehrer auf ihr Blatt schaut.

## 2.3 Konstantes bei meinem Unterricht

- Grundsätzlich gebe ich der Klasse möglichst viel Gelegenheit zu Eigenaktivität und zum Forschen.
  Ich arbeite höchstens dreissig Prozent der Unterrichtszeit "an der Wandtafel".
- Am Anfang jedes Unterrichtsblocks gebe ich Gelegenheit, Fragen zu stellen und Wünsche zu äussern. Ich löse dann gewöhnlich auch so viele Aufgaben vor, wie gewünscht werden. Weitere *persönliche* Fragen beantworte ich später während der individuellen Arbeitszeit.

## 2.4 Varianten meines Unterrichtsablaufs

- Am Anfang der Lektion eine kurze Einführung. Anschliessend ein ausführlicher individueller und betreuter Übungsteil.
- Lehrervortrag an der Wandtafel mit abgegebenem Skript, welcher durch Fragen unterbrochen werden darf. Während des Vortrags frage ich periodisch, ob es Unklarheiten gibt und ob mein Tempo in Ordnung ist.
- Individuelles Erarbeiten einer Thematik mit Hilfe eines von mir geschriebenen Lehrmittels, welches die notwendigen Hilfen bietet.
  Ein passives Konsumieren des Stoffs ist dabei nicht möglich. Eigenaktivität ist erforderlich und wird auch erbracht, ohne Zwang!
- Bearbeiten von Lernaufgaben.
- Zahlreiche Mischformen dieser Unterrichtstypen sowie weitere Unterrichtsmethoden.
- Häufig dürfen die Schüler wählen, ob ich etwas neues an der Tafel erklären soll oder ob sie selbst forschen wollen (vgl. Beilage 1).

## 2.5 Wie sieht mein individueller Unterrichtsteil aus?

- Während der individuellen Arbeitszeit haben die Schüler viel Freiheit. Sie können allein, zu zweit oder in Gruppen arbeiten. Es ist gestattet und erwünscht, dass sie im Zimmer umhergehen und mit verschiedenen Kollegen diskutieren oder sich helfen lassen.

  Manchmal arbeiten einige an etwas ganz anderem (es muss bloss mathematischer Natur sein), erfinden und lösen eigene Probleme. Durch die klare Vorgabe von zeitlichen und inhaltlichen Zielen verweise ich dabei auf die Eigenverantwortung, das Ziel trotzdem zu erreichen.
- Während die Lernenden selbst arbeiten, habe ich Zeit, die schwächeren Schüler zu betreuen und auf alle individuellen Fragen einzugehen. Ich wandere jeweils langsam durchs Zimmer und bleibe immer wieder stehen.
  **Tipp**: Oft wird erst gefragt, wenn ich sowieso in der Nähe bin.
  **Tipp**: Ich trage immer Notizpapier und Schreibzeug (für Erklärungen) auf mir. Die Lernenden dürfen dann die Zettel mit meinen Erklärungen behalten.
- Eigentlich sollte man die Schülerinnen nicht stören, wenn sie am Arbeiten sind. Manchmal breche ich diese Regel, wenn ich das Gefühl habe, eine Intervention sei im Moment keine Störung: Es kommt vor, dass ich jemandem von mir aus eine gezielte Frage stelle oder dass ich eingreife, wenn ich einen groben Fehler sehe.
- Tauchen wiederholt die gleichen Fragen auf, so fördere ich das gegenseitige Erklären. Ich schicke die Fragende zu der Person, der ich das gleiche zuletzt erklärt hatte. Dabei profitieren beide: Die Fragende erhält ihre Antwort und die Erklärende festigt ihre Erkenntnisse. Denn wirklich verstanden ist etwas erst dann, wenn man es jemand anderem auch erklären kann!
- Werde ich immer wieder mit den gleichen Schwierigkeiten konfrontiert, so löse ich die betreffende Aufgabe *still* an der Wandtafel vor, damit diejenigen, die wollen, abschauen können. Oft schreibe ich bei Bedarf auch noch Zusatzerklärungen an die Tafel.

## 2.6 Gestaltung des Übungsteils

- Für den Übungsteil gebe ich selten explizite Aufgaben-Nummern an. Vielmehr sage ich zum Beispiel, Übungsmaterial habe es auf den Seiten 35 - 38 im Buch. Die Schüler sollen eine geeignete Auswahl treffen. Wenn nötig, gebe ich ausnahmsweise dennoch eine konkrete Empfehlung besonders wichtiger Aufgaben.
- Dadurch müssen sich die Lernenden überlegen, welche Aufgaben gleichen bzw. verschiedenen Typs sind. Sie lernen, selbst Strukturen hinter Aufgabenstellungen zu suchen und zu erkennen. Sie lernen zu "sehen", ob eine Aufgabe schwierig oder leicht ist.
- **Tipp:** Für besseren Lernerfolg ist sofortige Selbstkontrolle wichtig. Dazu müssen die Lernenden die Ergebnisse zur Verfügung haben.

## 2.7 Motivation

- Wenn ich eine neue Klasse bekomme, investiere ich viel Zeit in die Motivation: Am Anfang jedes Blocks präsentiere ich eine Denksportaufgabe.

So freuen sich die Lernenden schon zum Voraus auf die Mathestunden und machen Bekanntschaft mit besonders interessanten Aspekten der Mathematik.
Die Freude am Fach bleibt auch dann bestehen, wenn ich später mit dem (regelmässigen) Denksport wieder aufhöre.

- Durch die im Unterricht gewährte Autonomie erhöht sich gewöhnlich die Motivation automatisch auf ein Vielfaches.

## 2.8 Selbstständigkeit

- Selbstständigkeit wird bei mir gross geschrieben. Von Anfang an informiere ich meine Schülerschaft, dass die Verantwortung für den Lernerfolg bei jedem selbst liegt. Ich verstehe mich als Organisator des Unterrichts und als Berater und Begleiter derjenigen, die etwas lernen wollen. Lernunwillige, schlecht motivierte und schwächere Schüler werden von mir beraten. Entgegen meiner Vorsätze "stosse" ich gelegentlich besonders unmotivierte durch wohlgemeinte Ermahnungen.
- Oft gebe ich keine konkreten Hausaufgaben. Falls ich welche gebe, kontrolliere ich sie nicht; ich zähle auf die Eigenverantwortung.
  Die Schüler wissen, dass sie zu jeder Mathematikstunde vorbereitet erscheinen müssen. Sie sollen selbst merken, wann es nötig ist, dass sie zu Hause noch etwas üben oder fertig machen.

## 2.9 Tipps für individualisierten Unterricht

- Ich gebe **klare** (inhaltliche und zeitliche) **Ziele** bekannt. Zum Beispiel meine Erwartung, was am Ende des Unterrichtsblocks bzw. bis zur nächsten Lektion beherrscht werden soll. Oder ich gebe zwei Wochen Zeit für das Erarbeiten und Beüben eines Themas. Die Lernenden müssen dann die Zeit selbst einteilen.
- Erwarte ich von den Lernenden längerfristige Planung, so ist es wichtig, ihnen eine **visuelle Hilfe fürs Zeitbudget** zu geben. Sie wären sonst überfordert, das Ziel fristgerecht und ohne Stress zu erreichen.
- **Grundvoraussetzung** für ein autonomes, individuelles und eigenmotiviertes Arbeiten sind die gewährte Autonomie, der geschickt aufbereitete Lernstoff sowie eine Lehrperson, welche die Schüler ernst nimmt, ihnen etwas zutraut und bestrebt ist, auf ihre Gedankengänge einzugehen.
- Darf ich Ihnen noch einen *persönlichen Trick* verraten?
  Lächeln Sie, bevor Sie ins Schulzimmer eintreten! Denken Sie dabei: "Ich habe euch gern". Wenn Ihnen nicht danach zumute ist, tun Sie's trotzdem.
  Probieren Sie einfach einmal aus, was das ausmacht. Sie werden sich selbst besser fühlen. Auf die Klasse werden Sie freundlicher und geduldiger wirken.

## 2.10 Persönliche Erfahrungen mit meinem Unterrichtsstil

- Ich komme schneller voran und erreiche nicht nur stofflich, sondern auch motivationsmässig und bezüglich Selbstständigkeit wesentlich mehr als mit konventionellem Unterricht.
- Während der individuellen Arbeitszeit ist es meinen Schülern nie langweilig. Ich habe eine hochprozentige Beteiligung. Die Fähigkeit zu Teamarbeit wird gefördert.

- **Es nützt nichts, an der Wandtafel Antworten auf Fragen zu liefern, die sich noch gar niemand gestellt hat.** Aber es macht Freude, individuell zehn Mal beim gleichen Problem zu helfen, wenn das Interesse daran aktiv ist.
- Die Erfahrung zeigt mir, dass die Schüler oft viel schneller im Begreifen sind als ich bei der Vorbereitung gedacht hätte. Voraussetzung ist natürlich, dass das verwendete Lehrmittel wirklich schülergerecht formuliert und aufgebaut ist.
  Früher war mir beim Frontalunterricht nie aufgefallen, dass die Schüler erstaunlich schnell begreifen.
  Tipp: **Die Schüler können mehr als wir denken, wenn wir es ihnen zutrauen !**
- Bei vertrauensvollem, wohlwollendem Verhältnis zwischen Schülern und Lehrer ist ein Missbrauch der gewährten Freiheit selten. Meine Schülerinnen arbeiten sogar dann seriös, wenn ich an einem Tag abwesend bin (wie z.B. am heutigen Kurstag) und den Unterricht nicht ausfallen lassen möchte.

# 3 Eigene Lehrmittel und Skripts

## 3.1 Warum sind Skripts sinnvoll?

- Ich finde es schade, wenn ein grosser Teil der Unterrichtszeit mit Abschreiben verbracht wird. Mathematisch passiert dabei meist nicht viel. Während des Abschreibens kann weder über den Stoff nachgedacht noch zugehört werden.
  Andererseits finde ich es wichtig, dass die Schüler alle Informationen zu einem Thema ordentlich gesammelt haben und darin nachschlagen können, wenn sie etwas wissen müssen.
  Ein abgegebenes Skriptum bietet dazu eher Gewähr als ein selbst geführtes Heft.
- Oft gestatte ich mir, an der Wandtafel auch andere Wege einzuschlagen oder andere Bezeichnungen zu verwenden als im verteilten Text. Die Schüler können sich voll aufs Mitdenken konzentrieren im Vertrauen darauf, dass sie später alles in einem verständlich geschriebenen Text nochmals nachlesen können.
  Als Beispiel dazu dient Ihnen *dieser* Text, an welchen ich mich im Vortrag nur der Spur nach halte.

## 3.2 Wie sehen meine Lehrmittel aus?

- Meine Schülerinnen erhalten ein Skript in Form von Blättern vor allem dort, wo es viel zum (Ab-) Schreiben gäbe. Anstelle eines Hefts führen sie einen Ordner mit meinen und ihren eigenen Blättern.
  Meine Blätter verteile ich in der Regel einzeln, d.h. nur selten en bloc.
- Öfter als Skripts verwende ich Arbeitsblätter und Lernaufgaben, ein Gemisch von Informationen und Gelegenheiten zu Eigenaktivität und Forschung (vgl. Beilagen 1 - 3). Gezielte Fragen leiten die Lernenden fast unvermeidlich zum Ziel. Die Antworten zu den gestellten Fragen sind in den Fussnoten, auf Beiblättern oder in Form von aufliegenden Musterlösungen vorhanden.
- **Grob gesagt** haben meine Lehrmittel meist eine der folgenden Formen:
  - Skript zum Wandtafelvortrag, auch geeignet als Text fürs Selbststudium

- Lernaufgaben, welche ich eher "Arbeitsblätter" nenne
- Übungen mit Musterlösungen
- Repetitionsserien mit Transfer und weiterführenden Problemen (vgl. Kapitel 5 sowie Beilage 4)

## 3.3 Vorteile selbst hergestellter Lehrmittel

Meine Lehrmittel sind bestimmt *nicht* besser als gekaufte. Und dennoch haben sie für mich eine höhere Qualität:

- Für die Schüler haben Sie einen höheren Wert durch das Bewusstsein, dass ihr eigener Lehrer das Material für sie persönlich hergestellt hat. Das gibt eine andere Beziehung zum Lehrmittel und zum Stoff.
- Das Lehrmittel ist zu hundert Prozent auf die Klasse, ihren Wissensstand und ihre Fähigkeiten abgestimmt. Schreibt man die Texte mit dem Computer, so lassen sie sich einfach für eine spätere Klasse neu anpassen.
- Ein beliebiger Aufbau des Stoffes ist möglich; ich kann eher auf Wünsche und die Interessen der Schülerschaft eingehen.
- Der Unterricht lebt mehr, weil ich als Lehrer voll hinter dem Lehrmittel stehe. Bei Verwendung eines Lehrbuchs bin ich ein passiv Aussenstehender und kann mich nicht völlig mit dem Buch identifizieren.
- Die Themen lassen sich so aufbereiten, dass sie in jeden zeitlichen Rahmen passen. So kann ich die gleiche Thematik sowohl in einer Woche als auch in zwei Monaten behandeln, je nach dem, wieviel Zeit mir dafür zur Verfügung steht. Bei gekauften Lehrmitteln geht so etwas nicht; ein Straffen eines Kapitels ist wegen des vorgesehenen Aufbaus fast unmöglich.
- Ich kann den Lernstoff besser vernetzen. Ein Transfer zu völlig verschiedenen Gebieten ist möglich (vgl. Beilage 1). Betreibe ich zum Beispiel analytische Geometrie, so kann ich Querverweise zur DG, zur Analysis, zu den komplexen Zahlen und zu vielem mehr einbauen. In einem Lehrbuch sind solche Transfers kaum möglich; Transfer wird meist nur innerhalb des eigentlichen Buchinhaltes vorgenommen.

## 3.4 Widerlegung von Einwänden gegen abgegebene Skripts

- Gelegentlich höre ich von Kollegen den Einwand, wie wichtig es sei, dass die Schüler alles selbst aufschreiben, weil sie durchs Schreiben gleichzeitig lernen.
  Ich halte diesen Einwand für reine Bequemlichkeit oder allenfalls Zeitmangel. Eine Lektion, in der die Schüler viel abschreiben müssen oder diktiert erhalten, ist nämlich schnell vorbereitet.
- Selbstverständlich ist das Schreiben wichtig. Meine Erfahrung zeigt aber, dass beim *Abschreiben* nicht viel überlegt wird. Nebst dem Abschreiben von der Tafel bleibt zu wenig Zeit für echtes Nachdenken. Die Freude der Schüler am Stoff und am Erfolg bleibt auf der Strecke.
  In meinem Unterricht wird *nicht* weniger geschrieben (im individualisierten Unterrichtsteil schreiben die Lernenden sehr viel). Es wird jedoch wesentlich mehr gedacht und mathematisiert beim Schreiben (vgl. auch Gallin). Diese Art des Schreibens finde ich sinnvoller und wertvoller.

### 3.5 Tipps fürs Schreiben von Lehrmitteln (vgl. auch Kap. 7)

- Wertvoll und wichtig sind bei abgegebenem Material Kopfzeilen mit Thema und Seitenzahl. Die Lernenden können sonst erfahrungsgemäss kaum Ordnung halten.
- Geben Sie bei Übungsserien immer alle Lösungen an, damit eine sofortige Kontrolle des Lernerfolgs möglich ist (vgl. Frey).
- Falls Sie nicht bloss einzelne Blätter, sondern einen zusammenhängenden Modul verfassen wollen:
  Packen Sie die Arbeit unbedingt nur an, falls Sie mindestens einen ganzen ungestörten Arbeitstag zur Verfügung haben (besser mehrere zusammenhängende Tage). Reservieren Sie sich diese Zeit bewusst. Verschieben Sie alle anderen Tätigkeiten auf andere Tage. Sonst sind Sie am Schluss nur frustriert.
- Mit eigenen Lehrmitteln sollten Sie längerfristig planen als nur gerade für den nächsten Schultag. Ideal ist es nach meiner Erfahrung, wenn ein Kapitel bereits fertig vorbereitet ist, bevor ich damit im Unterricht beginne.
  Vorteil: Sie haben fürs Thema von Anfang an ein klares Konzept.
- Nehmen Sie sich pro Jahr nur ein oder zwei neu aufbereitete Themen vor.
- Lehrmittel können Sie auch in Teamarbeit zusammen mit Ihren Kolleginnen herstellen. So kann der Aufwand für den einzelnen verringert werden.

# 4 Immer wieder gestellte Fragen; meine Antworten

### 4.1 Erfordern eigene Lehrmittel grossen Zeitaufwand für die Lehrkraft?

- Zugegeben: Ein Lehrer, der selbst Unterrichtsmaterial herstellt, gehört kaum zu der Kategorie von Personen, welche viel frei und 13 Wochen Ferien haben, wie unsere Mitbürger uns so gern sehen. Er wird auch kaum Zeit haben, den Kirchenchor zu leiten und politische Ämter zu bekleiden. In der Schule wird er sich nicht in zehn Arbeitsgruppen engagieren können, sondern vielleicht nur in deren zwei oder drei.
- Natürlich können Sie fremde Lehrmittel verwenden.
  Wenn Ihnen der Beruf bei wenig Vorbereitungsaufwand Spass macht, dann fahren Sie weiter so! Wenn Sie fachlich, inhaltlich und methodisch zufrieden sind mit fremden Lehrmitteln, dann verwenden sie diese unbedingt!
- Entscheiden Sie selbst, wie gross der von Ihnen betriebene Aufwand sein darf. Wichtig ist schlussendlich nicht bloss, dass Ihnen die Arbeit Freude macht, sondern auch, dass Ihr Unterricht bei professioneller Qualität erfolgreich ist und die Schülerschaft wirklich Mathematik lernt.
- Eigene Lehrmittel geben leider viel Arbeit. Wenn Sie sich dafür entscheiden, ist die Schule kein Job, den Sie nebenher betreiben. Das Verfassen eigener Lehrmittel kann Ihnen (und Ihrer Schülerschaft) jedoch Freude bereiten.
- … oder doch nicht so viel Zusatzarbeit?
  Möglicherweise machen Sie sich sowieso Notizen bei der Unterrichtsvorbereitung. Diese mit dem Computer statt auf Papier zu schreiben, verursacht nur anfänglich mehr Aufwand. Dafür haben Sie nun saubere Notizen, welche sich später erst noch

einfach verändern lassen. Wenn Sie jetzt noch etwas an der Darstellung feilen, sind die Notizen schon reif für den Kopierer …

## 4.2 Niveau-Unterschiede bei den Lernenden

- Meine Meinung:
  Niveau-Unterschiede treten in jeder Klasse auf. Sie lassen sich unmöglich vermeiden. Ich bezweifle, dass es unsere Aufgabe ist, solche Unterschiede auszugleichen.
- **Wie sehen die Niveauunterschiede bei konventionell geführtem Unterricht aus?**
  - Die schwachen Schüler sind schnell abgehängt. Sie fühlen sich überfordert und klinken sich aus. Sie getrauen sich ohnehin nicht, vor der ganzen Klasse zu fragen.
  - Der Unterricht orientiert sich mehrheitlich am "Mittelfeld" der Klasse.
  - Die guten Schülerinnen sind unterfordert und klinken sich ebenfalls aus, da sie sich langweilen.

  *Das Ergebnis ist ein relativ grosser Verlust:*
  Sowohl die schwachen als auch die guten Schüler werden kaum erreicht!
- **Bei individualisiertem Unterricht** gibt es bei etwa gleich grossen Niveauunterschieden ein **generell höheres Niveau!**
  - Die guten Schülerinnen haben Gelegenheit, sich mit interessanteren Fragestellungen auseinanderzusetzen. Oder sie helfen den schwächeren in der Klasse. Somit betreiben sie Mathematik statt sich zu langweilen.
  - Die schwachen Schüler denken ebenfalls mit. Sie *getrauen* sich, Fragen zu stellen. Sie können von der Lehrerin intensiv betreut werden. Sie diskutieren miteinander über die Materie.

  *Das Ergebnis ist ein relativ grosser Gewinn:*
  Alle Schüler denken aktiv mit. Alle betreiben Mathematik. Alle können etwas lernen (mit "alle" ist natürlich "fast alle" gemeint).

## 4.3 Klassen, die nicht mitspielen

Bei gewissen Klassen werden Sie einen Widerstand erleben, wenn Sie vom lehrerzentrierten zu schülerzentriertem Unterricht *umstellen*.
Wie überall gibt es auch hier kein allgemeines Erfolgsrezept. Es gibt jedoch Tricks, welche den Erfolg fördern können.

**Tipp**: Die wichtigste Voraussetzung für einen Erfolg ist gewiss die, dass Sie selbst von der neuen Methode überzeugt sind. Sind Sie nicht wirklich in Ihrem Innern überzeugt, dann lassen Sie's besser bleiben.

Ein paar Gedanken, die Ihnen helfen könnten:

- Beginnen Sie mit individualisierten Unterrichtsmethoden möglichst bei *neuen* Klassen. Dort aber von Anfang an und ziemlich konsequent.
- Bei "alten"/bisherigen Klassen steigen Sie *langsam* um: Verwenden Sie nur ab und zu die neue Methode , bis die Lernenden sich einigermassen daran gewöhnt haben.
- Vielleicht eignen sich Denksport-Aufgaben für die ersten zwei bis drei Mal besser als eigentlicher Mathematik-Stoff.
- Praktizieren Sie *verschiedene* schülerzentrierte Methoden.
- Verwenden Sie geeignete Anleitungen und Lehrmittel.

- Erklären Sie den Schülerinnen die Vorteile. Leisten Sie Überzeugungsarbeit. Machen Sie Ihre Methoden transparent.
- Deklarieren Sie den Schülerinnen Ihr Vertrauen, dass sie es selbst können.
- Haben Sie Verständnis:
  Wie geht es uns Lehrkräften, wenn *wir* uns Neuerungen unterwerfen müssen?
  Die jungen Menschen sind zwar flexibler als wir "alten", aber auch ihnen machen Umstellungen Mühe.
- Lassen Sie die Schülerinnen nicht hängen (korrigieren und vorbereiten können Sie ausserhalb der Lektionen!). Wandern Sie als Assistent umher. Markieren Sie Verfügbarkeit!
  Geben Sie ihnen das Gefühl, dass nichts passiert, wenn ihnen etwas nicht allein gelingt. Investieren Sie bei Versagen die Zeit, an der Tafel alles nochmals zu erklären (dann allerdings etwas kürzer als bei reinem Frontalunterricht).
- Geben Sie beim Helfen nicht immer gleich alle Antworten. Fragen Sie stattdessen nach und fordern Sie die Schülerin soweit, dass diese schlussendlich selbst die Lösung findet.
- Ermuntern Sie die Schülerinnen zur Zusammenarbeit. Gestatten Sie ihnen ausdrücklich das Reden. Es macht nichts, wenn es im Zimmer etwas lärmig wird.
- Klären Sie die Verantwortung: Der Lernende, nicht die Lehrkraft hat die Verantwortung für den Lernerfolg. Die Lehrperson ist verantwortlich für eine gute Organisation des Unterrichts, für zweckmässiges Unterrichtsmaterial, Lehrmittel und Hilfen sowie für die Betreuung der Schülerschaft. Der Schüler hingegen muss selbst etwas lernen wollen, sonst haben alle Bemühungen seitens der Lehrkraft keine Chance auf Erfolg.
- In diesem Sinn hat nicht die Lehrkraft eine Bring-Schuld (sie muss nicht dafür sorgen, dass es die Schülerin schlussendlich kann), sondern die Schülerin hat eine Hol-Schuld: Sie muss sich ums Drauskommen bemühen und die Lehrperson beanspruchen, wenn sie Hilfe braucht.
- Deklarieren Sie klar den Tarif:
  "Bis dann und dann muss das und das beherrscht werden." Kein endloses Verschleppen. Verschiebungen von Terminen bleiben eine Ausnahme und werden nur in begründeten Fällen gewährt.

# 5 Mathematische "Medizin"

## 5.1 Anspruchsvolle Probleme?

Bei meinem Start als Junglehrer hatte mir mein damaliger Mentor unter anderem auch folgenden Ratschlag erteilt: Ich solle jeweils die schwierigsten Aufgaben zu einem Thema nicht im Unterricht behandeln, sondern für die Prüfung aufsparen.
Glücklicherweise wird dieser unterdessen pensioniert sein und keinen weiteren Schaden mehr anrichten können …
Anfänglich befolgte ich diesen fiesen Ratschlag, bis mir bewusst wurde, dass Prüfungen nicht der geeignete Ort sind, um solche Herausforderungen zu meistern.

Trotzdem, wenn ich meine Schülerinnen fördern will, leiste ich ihnen einen schlechten Dienst, wenn ich immer alle anspruchsvollen Probleme an der Wandtafel aus der Welt schaffe. Fördern hat auch mit *fordern* zu tun.

Soll ich nun die anspruchsvollen Probleme zum Thema einiger individualisierter Lektionen machen?
Es gibt Gründe, die dafür sprechen und andere, die dagegen sprechen. Dafür spricht, dass es den begabten Schülern weniger langweilig ist und dass die Hilfe des Lehrers in Anspruch genommen werden kann. Dagegen spricht das unnatürliche Zeitgefäss: Wer kann schon *auf Kommando kreativ* sein? Der Lernerfolg ist grösser, wenn für die wirklich schwierigen Probleme kein Zeitdruck besteht. Historisch gesehen ist kaum eine Erkenntnis in nur dreissig oder in fünfundvierzig Minuten gewonnen worden. Auch wir Mathematiker können (für uns) schwierige Probleme oft nicht unter Zeitdruck lösen. Ich brauche dafür manchmal mehrere Anläufe. Somit eignen sich die Unterrichtsstunden nicht besonders gut für anspruchsvolle Herausforderungen.

Es bleibt die Frage, in welchem Rahmen die Schülerschaft mit besonders anspruchsvollen und dennoch lösbaren Problemen konfrontiert werden soll. Wo sollen die Lernenden die Erfahrung machen, dass sie auch ihnen unvertraut erscheinende Aufgabentypen bewältigen können? Ich werde diese Frage weiter unten beantworten.

## 5.2 Vergessen

Eines der grössten Probleme in der Schule ist das Vergessen.
Wie kann ich verhindern, dass der soeben gelernte und geprüfte Stoff nicht bald wieder vergessen wird? "Ihr sollt fürs Leben lernen und nicht bloss für die Prüfung" ist zwar ein frommer Wunsch, geht aber an der Realität vorbei. Der Grossteil der Lernenden lernt für die Prüfung. Kurzfristig wird das Kurzzeitgedächtnis gefüttert, um es nach der Prüfung ebenso schnell wieder zu "entlasten". Meine Schülerinnen wissen (dank meiner unermüdlichen Aufklärung), dass sie permanent lernen sollten, dass sie zu jeder Lektion vorbereitet erscheinen sollen, ... , und dass so der Lernerfolg grösser ist. Bloss: Wer hält sich daran? "Andere Fächer sind auch wichtig", "keine Zeit", "ausserschulische Verpflichtungen" ... sind einige der beliebtesten Ausreden um nicht das zu tun, was eigentlich getan werden sollte.
Die Erfahrung zeigt, dass die beste Beratung nur bei wenigen auf fruchtbaren Boden fällt. Soll ich also aufgeben und resignieren?

## 5.3 Meine Lösung

Das, was immer wieder gebraucht wird, wird am wenigsten vergessen. Deshalb erhalten meine Klassen periodisch Serien von Aufgaben und Problemen, welche sie als Hausarbeit bearbeiten und für welche sie ein paar Wochen Zeit haben.
Die Aufgaben wähle ich jeweils so aus, dass möglichst viel von dem, was die Klasse bereits können sollte, beim Lösen gebraucht wird. Sie sind kunterbunt zusammengemischt aus dem Stoff, den die Klasse früher behandelt hatte. Ich bemühe mich auch um vernetzende Transfer-Aufgaben, welche man in den Schulbüchern kaum antrifft. Zudem baue ich Probleme ein, welche über den behandelten Stoff hinausgehen und Kreativität erfordern. Die oben erwähnten "schwierigsten Aufgaben" finden hier ihren Platz. Oft müssen zum Lösen noch anderswo Zusatzinformationen besorgt werden, ohne dass ich das speziell erwähne. Gewisse Probleme sind offen formuliert, vielleicht sind

sogar verschiedene Antworten denkbar. Wenn möglich baue ich auch bereits lösbare Aufgaben aus Maturaprüfungen ein. Daneben sind auch Knacknüsse denkbar, welche die Freude an der Materie wecken sollen.

Diese Aufgabenserien nenne ich "Medizin gegen das Vergessen". Sie sind ein fester Bestandteil meines Unterrichtskonzepts. Spätestens beim Abgabetermin verteile ich jeweils die nächste Serie. Die Abgabe der Arbeiten ist obligatorisch und wird von mir kontrolliert.
Die Endergebnisse schlage ich im Schulzimmer an; sie müssen von den Lernenden *vor* der Abgabe kontrolliert und allenfalls verbessert werden.
Die gelösten Aufgaben werden von mir angeschaut und mit Rückmeldungen versehen. Dabei lege ich grossen Wert auf die Lösungs-*Wege* und deren Verständlichkeit (vgl. nächster Abschnitt "Darstellung von Schülerarbeiten"). Die Schülerinnen sollen lernen, ihre Gedanken klar verständlich zu Papier zu bringen, nach dem Motto "**Der Weg ist das Ziel, nicht das Endergebnis**".

Aufgaben, die allgemein unbefriedigend gelöst worden sind, bespreche ich anschliessend im Unterricht. Auf Wunsch löse ich auch andere Aufgaben vor.
Wenn ein grosser Teil der Klasse dies wünscht, gebe ich gelegentlich auch schon zum Voraus Tipps ab. Für den Notfall besteht sogar das Angebot, meine Musterlösungen zu studieren oder zu kopieren. Eine abgeschriebene Arbeit ist immer noch wertvoller als eine nicht gemachte. Voraussetzung: Beim Abschreiben wird wenigstens mitgedacht.

Meine Tipps an die Lernenden:
Ich leite sie an, mit den Aufgaben möglichst frühzeitig zu beginnen. Gelingt das Lösen einer Aufgabe nicht auf Anhieb, legt man diese ein paar Tage zur Seite und packt sie dann nochmals an. Tritt der Erfolg noch immer nicht ein, kommt ein dritter Anlauf nach ein paar weiteren Tagen. Erst nach dem dritten Scheitern bittet man eine Kollegin oder den Lehrer um Hilfe.

Um der Repetition mehr Motivation zu verleihen, streue ich bei Mathematikprüfungen gelegentlich eine analoge Aufgabe zu einer aus der letzten Repetitionsserie ein.
Ich erkläre immer wieder: Wer diese Serien zuverlässig und selbstständig bearbeitet, muss sich vor der Matura fürs Fach Mathematik nicht mehr gross vorbereiten.

## 5.4 Der Gewinn

Was erreiche ich mit diesem Mehraufwand, mit dem ich gewöhnlich nicht einmal eine einzige Schulstunde bestreiten kann?

- Bei den meisten Lernenden ist immer der gesamte Stoff mehr oder weniger präsent. Es gerät nichts in Vergessenheit, weil es dauernd wieder gebraucht wird.
- Auch anspruchsvolle Probleme finden ihren Platz. Es ist genügend Zeit vorhanden, um deren Lösung reifen zu lassen.
- Die Lernenden gewinnen Selbstvertrauen und grössere Selbstständigkeit. Sie machen die Erfahrung, dass sie auch unvertraut aussehende Probleme allein bewältigen können, wenn ihnen genügend Zeit dazu zur Verfügung steht.
- Die Schüler lernen, die Zeit sinnvoll zu planen. Sie kennen lange zum Voraus das zeitliche und inhaltliche Ziel. Anfangs tappen viele in die Falle, dass sie den Auftrag lange vor sich her schieben und dann viel zu spät damit beginnen. Mit der Zeit ge-

langen sie von selbst zur Einsicht, dass es sich lohnt, mit einem grösseren Auftrag frühzeitig zu beginnen.

### 5.5 Wie finde ich geeignete Aufgaben?

Ich führe für jede Klasse ein File mit einem Vorrat von Aufgaben, welche ich demnächst in eine Serie einbauen könnte. Entdecke ich irgendwo eine besonders interessante oder originelle Aufgabe, so nehme ich mir die Zeit, diese sofort in meinen Vorrat aufzunehmen. Stocke ich dieses File regelmässig auf, kann ich beim Zusammenstellen einer neuen Serie von meiner Vorarbeit profitieren und bequem eine geeignete Auswahl treffen.

- In Fachzeitschriften und Büchern finden sich oft anregende Ideen und gute Aufgaben.
- Viele Gymnasien verschicken regelmässig ihre Maturaprüfungen an alle übrigen Gymnasien. Ein kurzes "Überfliegen" derselben genügt mir gewöhnlich, um daraus (falls vorhanden) einige Rosinen zu picken.
- Während der Unterrichtsstunden und beim Vorbereiten kommen mir oft gute Ideen, welche ich dann sofort schriftlich festhalte. Viele Aufgaben erfinde ich selbst.

## 6 Darstellung von Schülerarbeiten

### 6.1 Wozu eine gute Darstellung?

Gute Darstellung ist unter anderem auch eine Frage des Anstands.
Früher wurden unsere schriftlichen Maturaprüfungs-Arbeiten einem externen "Experten" zur Begutachtung überreicht. Ich kann mich noch gut erinnern, wie ich mich manchmal geschämt hatte, wenn dieser sehen konnte, was für ein "Geschmier" ich mir von meinen Schülern gefallen lasse.
Aber auch ohne Experten: Ich korrigiere nicht gern Arbeiten, bei denen alles unverständlich wild durcheinander geschrieben ist. Ebensowenig schätze ich schlecht lesbare Handschrift.
Zudem zeigt die Erfahrung, dass schlechte Darstellung oft mit mangelhafter Leistung korreliert und gute Darstellung fast automatisch zu besseren Ergebnissen führt.

Wer später erfolgreich sein will, muss sich korrekt ausdrücken, seine Arbeit übersichtlich präsentieren und verständlich dokumentieren können.
Denken wir an einen genialen Erfinder, der einen Produzenten oder einen Job sucht: Die Arbeit lässt sich nur verkaufen, wenn sie gut "verpackt" ist. Der Empfänger muss auf einen Blick sehen können, um was es geht. Andernfalls ist die Gefahr gross, dass die Arbeit ungelesen beim Altpapier landet.

Spätestens bei der Maturaarbeit werden Darstellung und Verständlichkeit notenrelevant.

Rufen wir also unsere Lernenden zu besserer Darstellung auf!
*Sie wissen genau so gut wie ich, dass das ein Witz ist. Sie könnten die Aufforderung ebenso gut in den Wald rufen …*

## 6.2 Wie erreiche ich bei den Lernenden eine gute Darstellung?

Die Erziehung zu sauberer Darstellung und vollständiger Dokumentierung der Gedanken und Rechnungen ist meines Erachtens gleich wichtig wie das Erwerben mathematischer Fähigkeiten.
Bei mir müssen die Aufgaben deshalb so gelöst werden, dass der Lösungsweg für einen (interessierten) Aussenstehenden nachvollziehbar ist: Der *Weg* ist das Ziel, nicht das Endergebnis!
Zu meinen Forderungen gehört auch eine korrekte mathematische Schreibweise und weitgehend fehlerfreies Deutsch.

Damit die Lernenden sich um eine gute Darstellung bemühen, braucht es einen geeigneten Anreiz. Ich erreiche das Ziel "gute Darstellung" mit einem **Bonus-System**: Bei Prüfungen erteile ich Zusatzpunkte für gute Darstellung, mit welchen die Note aufgebessert werden kann. Die Maximalzahl der Darstellungspunkte beträgt gewöhnlich knapp 10% der Prüfungspunkte. Von dieser Maximalzahl gibt es dann ungefähr für jeden "Darstellungsfehler" einen Punkt Abzug. Auch mit Null Darstellungspunkten ist jederzeit die Note 6 erreichbar.
Selbstverständlich wird mit jeder Klasse zum Voraus festgelegt, welche Kriterien ich bei der Beurteilung der Darstellung anwende. Diese Kriterien sind nachlesbar bei www.macfunktion.ch/links/Darstellung.html . Hier bloss ein paar wenige Beispiele:

- Korrekte Verwendung mathematischer Notationen (z.B. $AB \neq \overline{AB} \neq \vec{AB}$ )
- Die Bedeutung verwendeter Variablen muss deklariert werden
- Zwischen umgeformten Termen steht ein Gleichheitszeichen
- Keine missbrauchten Gleichheitszeichen
- Rechnungen und Gleichungen werden mit einem "Titel" verständlich gemacht
- Gut lesbare Schrift

Hingegen ist das Durchstreichen von Fehlüberlegungen und von Fehlern kein Mangel. Später im Beruf schreibt man sowieso mit einem Textverarbeitungssystem und meistens ohne den Zeitdruck einer Prüfung.
Nochmals: Auch mit miserabler Darstellung ist die Bestnote 6 erreichbar. Andererseits wende ich bei falschem Endergebnis und *unverständlichem* Lösungsweg nicht mehr allzu viel Zeit auf zum Suchen von Teilschritten, welche noch Punkte ergeben könnten. Insofern kann sich eine sehr schlechte Darstellung doch auch auf die Note auswirken.

## 6.3 Was bewirke ich mit diesem System?

Da mit den Darstellungs-Punkten die Note verbessert werden kann, sind die Schülerinnen und Schüler zu guter und sauberer Darstellung motiviert (der Aufruf verhallt also nicht ungehört im Wald).
Nach der Einführung dieses Systems musste ich mich vor den Experten an Maturaprüfungen nicht mehr schämen. Die Mehrheit der Arbeiten wird fast druckreif abgeliefert.
Ein weiterer Vorteil: Ich kann auf korrekte mathematische Schreibweise pochen. Damit unterbinde ich nicht mehr den Willen zur Dokumentierung, weil "Schreibfehler" zu keinem Notenabzug führen. Ein Notenabzug für (zum Beispiel) falsche Bezeichnungen würde die Scheu fördern, sich ausführlich auszudrücken.
Weil eine gute Darstellung auch zu klarerem Denken führt, fördert meine Massnahme bei vielen Lernenden besseren Erfolg.

Die Schüler (auch diejenigen, welche mathematisch weniger erfolgreich sind oder sich nicht für Mathematik interessieren) haben damit wirklich **etwas fürs Leben gelernt**.

# 7 Schreiben von Lehrmitteln

## 7.1 Klassische Aufgabe vs. Lernaufgabe

Bei konventionellem Unterricht liegt manchmal eine Aufgabe vor. Der Schüler sucht in seiner "Rezeptliste" oder in einer Formelsammlung nach einem geeignetem Algorithmus und löst die Aufgabe. Auftrag erfüllt, Sinn vergessen? Eine Beziehung zur erledigten Arbeit entsteht dabei oft nicht.
Eine mögliche Alternative ist die Lernaufgabe. Es liegt kein Rezept vor. Der Schüler wird geleitet, den Weg selbst zu finden und begehen. Er findet selbst eine Methode, welche er dann auch wirklich versteht. Die Motivation und die Beziehung zur Arbeit sind grösser. Das Erfolgserlebnis ist echt.
Wer keine Zeit oder Lust hat, eigene Lehrmittel zu schreiben, kann gelegentlich zur Methode "Lernaufgabe" greifen. Solche sind mit einem geringen Aufwand realisierbar; sie bereichern den Unterricht. Bildlich gesprochen stellen sie ein Geländer am Weg dar. Klassische Aufgaben haben kein Geländer, welches leitet.

## 7.2 Rekapitulation

Für individualisierten Unterricht ist es oft vorteilhaft, *eigene* Lehrtexte abzugeben. Von den herkömmlichen Lehrbüchern eignen sich nur wenige fürs Selbststudium der Lernenden.
Ich persönlich schreibe gern *zusammenhängende* Lehrmittel. Ein paar Stichworte, wie man diese Arbeit geschickt anpacken kann:

- Genügend Zeit fürs Schreiben reservieren (z.B. ganze Tage konzentriert).
- Langfristig planen
- Evtl. Teamarbeit
- Wichtig für die Lernenden sind Kopfzeilen mit Thema und Seitenzahlen.
  Ohne diese gelänge es nur den wenigsten, in ihren Unterlagen eine sinnvolle Ordnung zu halten.
- Zur sofortigen Lernkontrolle sollten die Ergebnisse verfügbar sein.
- Idealerweise haben Sie ein Thema schon fertig vorbereitet, bevor Sie damit im Unterricht beginnen.

## 7.3 Planung der Arbeit

Sei es, dass Sie eine Lernaufgabe formulieren, sei es, dass Sie einen ganzen Lehrmittelmodul aufsetzen wollen: In jedem Fall lohnt es sich, dass Sie die Arbeit zum Voraus sorgfältig planen.

- Was wollen Sie schreiben?
- In welcher Reihenfolge?
- Welche Schwerpunkte möchten Sie setzen?
- Wie viel Eigenaktivität erwarten Sie von den Lernenden?
  Handelt es sich um eine Lernaufgabe oder eher um ein Skriptum?

- Wie viel Zeit darf das Thema im Unterricht beanspruchen?

Ein gutes Hilfsmittel für ein gut gegliedertes Modul ist es, *vor* Beginn der Arbeit ein **Konzept** aufzuschreiben. Dieses kann in Form eines Brainstormings oder einer Materialsammlung geschehen: Was will ich alles erwähnen? In welcher Reihenfolge (Aufbau)? Das "Konzept" kann später im Laufe der Arbeit immer noch geändert und angepasst werden. Ihr Text erhält damit auf jeden Fall eine klarere Struktur; Sie haben damit ein Gerüst für die eigentliche Arbeit.

**Vermeiden Sie** unbedingt …

- … einfach drauf los zu schreiben.
- … bloss die alten (Frontal-) Unterrichtsvorbereitungen neu zu schreiben.
- … "langfädig" zu werden.

## 7.4 Formulierung

Schenken Sie der Formulierung genügend Aufmerksamkeit. Verwenden Sie vorwiegend kurze Sätze. Verzichten Sie möglichst auf geschachtelte Relativsätze und auf Klammerbemerkungen. Formulieren Sie für jeden Gedanken einen eigenen Satz.

Achten Sie auf einfaches Deutsch und verständliche Fachsprache. Verzichten Sie auf die Einführung weniger wichtiger Fachausdrücke. Ein Text, der sich an die Lernenden richtet, kann nicht gleich formuliert werden wie einer, dessen Zielpublikum Fachkollegen sind. Manchmal ist es eine gute Kontrolle, wenn Sie Ihren Text am Schluss einmal *laut* lesen. So bemerken Sie selbst, wo er noch holpert.

Bringen Sie einen persönlichen Bezug in den Text. Warum finden Sie als Lehrkraft das Thema interessant? Warum ist es für die Lernenden wichtig? Sprechen Sie die Lernenden im Text an.

Haben Sie Vertrauen in die Lernenden. Ihre Grundhaltung ist: "Sie können es schon, wenn sie wollen". Das Vertrauen schlägt sich automatisch im Text nieder.

## 7.5 Gliederung

Schreiben Sie *kurze* Lerneinheiten (1 - 2 Seiten pro Klein-Thema). Gliedern Sie längere Texte. Bringen Sie Titel an. Achten Sie auf übersichtliche Darstellung. Die Struktur des Aufbaus soll erkennbar sein. Bevorzugen Sie kurze Abschnitte. So wird der Text besser lesbar. Dosieren Sie die Anleitungen eventuell in Einzelschritte. Für ein neues Thema beginnen Sie am besten eine neue Seite.

Zum Start stellen Sie eine kleine Motivation voran, beginnen mit einer Repetition oder zeigen einen Zusammenhang auf.

Schreiben Sie *nicht* linear. Mit "linear" meine ich, am Anfang beginnen und am Ende aufhören. Bei Verwendung eines Textverarbeitungssystems können Sie es sich leisten, mit der Gliederung zu beginnen. Dieses Gerüst können Sie dann nach und nach mit Inhalt füllen, und zwar in beliebiger Reihenfolge. So können Sie alle guten Ideen, die Ihnen während des Schreibens in den Sinn kommen, sofort und am richtigen Ort niederschreiben.

## 7.6 Eigene Lehrmittel entstehen fast von selbst

Wenn Sie ein gutes Lehrbuch zur Verfügung haben, welches Sie im Unterricht einsetzen können, so schätzen Sie sich glücklich! Trotzdem wird es auch Ihnen gelegentlich passie-

ren, dass Sie zu einem Thema kein *geeignetes* Lehrmittel finden oder dass es gar keines gibt.
In einem solchen Fall müssen Sie den Stoff selbst aufbereiten. Meine Erfahrung zeigt, dass ich dabei eindeutig am schnellsten bin, wenn ich gleich am Computer zu schreiben beginne. Warum?
Wenn ich den Stoff nicht aus dem Ärmel schütteln kann, wenn er vielleicht auch für mich relativ neu ist, dann bin ich auf eigene Notizen angewiesen. Dies unabhängig davon, ob ich das Thema danach frontal unterrichten werde oder ob ich die Schüler zum individuellen Erarbeiten anleiten möchte.

Ein Beispiel:

> Kürzlich habe ich das Thema "Kettenlinie" für das Schwerpunktfach vorbereitet. Ausser, dass ich von der Kettenlinie schon gehört hatte, war ich mit der Materie gänzlich unvertraut. Ich musste mich zuerst selbst einarbeiten. Dabei ist es von Vorteil, sich gleich Notizen zu machen. Hätte ich diese auf Papier geschrieben, hätte ich im Verlauf meiner Arbeit mehrmals neu beginnen müssen, weil sich beim Studieren entsprechender Zeitschriften-Artikel immer wieder neue Erkenntnisse dazu gesellten.

Können Sie sich eine solche Zeitverschwendung leisten, das gleiche x-mal neu zu schreiben, bis Sie damit zufrieden sind? Ich nicht. So zwinge ich mich, meine Notizen von Anfang an am Computer zu schreiben. Dabei brauche ich zwar für Formeln und Figuren etwas länger als auf dem Papier (mit Übung aber nur unwesentlich länger). Dennoch gewinne ich viel Zeit, da ich alles nur einmal schreiben muss. Ergänzungen und Änderungen lassen sich jederzeit noch anbringen.
Würde ich das Thema nur einmalig unterrichten und würde ich bei der Vorbereitung von der Hand in den Mund leben, so würden natürlich stichworartige Hand-Notizen genügen. Nach meiner Meinung ergibt es aber keinen guten Unterricht, wenn ich heute das erarbeite und vorbereite, was ich morgen brauche. Dann würde ich einfach so "vor mich her stolpern", ohne dass ich ein klares Konzept hätte.
Meistens möchte ich ein interessantes Problem später wieder einmal unterrichten. Deshalb genügen mir Stichworte als Notizen nicht.
Wenn ich das Thema selbst richtig verstehen möchte und auch in einem Jahr aus meinen Unterlagen noch drauskommen will, muss ich mir alle Zusammenhänge, Erkenntnisse und Rechnungen sauber aufschreiben. Diese Arbeit habe ich also unabhängig davon, ob ich den Schülern ein Skript verteilen werde oder nicht. Der Mehraufwand, das Geschriebene zu einem Skript umzuformulieren, ist im Vergleich zum gesamten Aufwand des mich Einarbeitens klein. Insbesondere, wenn ich dieses Ziel von Anfang an im Auge habe. Ob es dann ein Skript gibt oder ein zum Selbststudium geeignetes Lehrmittel, spielt auch keine grosse Rolle mehr.

Mit diesen Gedanken möchte ich Sie überzeugt haben, dass das Schreiben eines eigenen Lehrmittels gar nicht immer einen grossen Zusatzaufwand verursacht. Voraussetzung ist, dass Sie gern schreiben und gut formulieren können.
Haben Sie den Mut und machen Sie den Versuch!

# 8 Schlussbemerkungen

- Meine Methoden sind nicht das "Gelbe vom Ei", sondern einfach *eine* Möglichkeit zu unterrichten. Ich bin froh, damit guten Erfolg zu haben.
- Kein Unterrichtssystem kann immer allen Schülern gerecht werden. Ich denke jedoch, dass bei meinem Unterrichtsstil weniger schwache Schüler auf der Strecke bleiben.
- Laut Heinrich Keller, emer. Prof. der Uni Zürich, haben intensive Untersuchungen zu Tage gebracht, dass es keine Methode gibt, welche *den* guten Lehrer bzw. *den* guten Unterricht ausmachen.
- An meiner Schule wird das individuelle Unterrichten von der Schulleitung propagiert und gefördert. Es ist mir egal, wenn es gelegentlich vor der Schulzimmertüre so tönt, wie wenn kein Lehrer anwesend wäre.
- Ich unterrichte vorwiegend in grösseren Blöcken (mindestens zwei Lektionen am Stück).
- Ursprünglich gab mir ein Schülerwunsch mit den Anstoss, vom Frontalunterricht wegzukommen:
  *Ich solle während der Lektionen nicht so viele Aufgaben an der Tafel vorlösen, sondern sie selbst forschen lassen, dafür aber Musterlösungen zum Einsehen auflegen.*
  Für mich war dies ein Schlüsselerlebnis, merkte ich doch, dass die Schüler so viel eifriger und interessierter arbeiten.
- Meine Mehrarbeit bei der Vorbereitung zahlt sich durch eine Entlastung im Unterricht und durch grössere Berufszufriedenheit aus.
- Wäre ich nicht ein passionierter Schreiber, käme es mir nie in den Sinn, so viele eigene Lehrmittel herzustellen!

- Es gibt kein Patentrezept für erfolgreichen Unterricht.
- Jeder muss den Weg finden, welcher ihm am besten entspricht.
- **Haben Sie den Mut, immer wieder neues auszuprobieren!**
- Trauen Sie Ihren Schülerinnen (in verschiedener Hinsicht) mehr zu!

## Was ist Ihre Meinung?

Haben Sie eine andere Meinung?
Haben Sie gegenteilige Erfahrungen?
Welche Erfahrung haben Sie mit meinen Tipps gemacht?

Ihre Kritik bwz. Rückmeldung würde mich freuen.
Schreiben Sie mir an andre.moessner@kst.ch

Trogen, im Februar 2004
André Mössner

## Beilagen

1 Arbeitsblätter, welche sich sowohl als Skript zum Lehrervortrag als auch zum Selbststudium eignen
2 Lernaufgabe
3 Lehrmittel, das zu reinem Selbststudium vorgesehen ist
4 Zwei Beispiele von Repetitionsserien "Medizin gegen das Vergessen"

## Literatur

- K. Frey, Allgemeine Didaktik, vdf ETH Zürich
- F. Schulz von Thun & W. Götz, Mathematik verständlich erklären, Urban & Schwarzenberg 1976 (leider vergriffen)
- U. Ruf & P. Gallin, Mathematik und Sprache in der Schule, Verlag L. u. L. Zürich 1992
- Michael Grinder, Ohne viele Worte (Nonverbale Muster für erfolgreiches Unterrichten), VAK 1995
- A. Mössner, Dynamische Algebra im Schulunterricht, in VSMP-bulletin 83 (2000) S. 29-35
- A. Mössner, Funktionen dynamisch untersuchen, in Mathematik Lehren 103 (Dez. 2000), S.22-50
- Matthias Pöhm, Vergessen Sie alles über Rhetorik, mvg-Verlag 2001
- Peter Gallin, Vom Sinn des Mathematikunterrichts (Aufsatz), Okt. 2001
- div. Publikationen von Erwin Beck, päd. Fachhochschule Rorschach (vgl. www.phs.unisg.ch )
- Albrecht Beutelspacher, In Mathe war ich immer schlecht, Vieweg 2002
- Albrecht Beutelspacher, Das ist o.B.d.A. trivial!, Vieweg 2002
- Siegerist / Wirth, Vektorgeometrie – Skript für den Unterricht, 2002, ISBN 3-905647-08-7
- Otto M. Keiser, Einführung von CAS in der Algebra, Sauerländer 2003

## Adressen

- Beispiel eines Lehrmittels von A. Mössner: www.macfunktion.ch/Lehrmittel.html
- Fertige Lehrmittel sind zu finden bei www.educeth.ethz.ch/mathematik
- Links für Lernende und Lehrende: www.macfunktion.ch/links
- Tipps für Schülervorträge: www.macfunktion.ch/links/Vortrag.html
- Tipps zum Schreiben von wissenschaftlichen Texten: www.macfunktion.ch/links/schreiben.html
- Tipps für gute Darstellung: www.macfunktion.ch/links/Darstellung.html
- Plattform zum Austausch von Dokumenten: www2.educa.ch/dyn/9.asp?url=9035.htm
- www.zebis.ch -> Unterricht -> Mathematik

Beilage 1

## Beispiel eines von mir verfassten Lehrmittel-Moduls: Matrizenrechnung

In dieser Beilage erhalten Sie ein Beispiel eines kleinen Lehrmittels zum Thema "Matrizenrechnung".
Es handelt sich bloss um den Theorieteil; das Lehrmittel wird erst vollständig, wenn es noch durch eine geeignete Aufgabenserie ergänzt wird.

Mein Ziel war es, innerhalb einer kurzen Zeit meinen Maturanden einen kleinen exemplarischen Einblick ins Thema Matrizen zu geben. Diejenigen, welche im Studium in irgend einer Form Mathematik brauchen werden, sollen diesem Thema schon einmal begegnet sein und ein paar Anwendungen gesehen haben.

- Der Text bzw. einzelne Seiten des Textes eignen sich sowohl fürs Selbststudium der Lernenden (dann müssen Musterlösungen aufliegen) wie auch als begleitendes Skriptum zu einem Wandtafelvortrag.
  Er gibt mir die Freiheit, ja nach Wunsch der Klasse jederzeit die eine oder andere Unterrichtsform zu wählen.
  Er garantiert ausserdem, dass alle Schüler auch später darin die nötigen Informationen zum behandelten Stoff finden können.

- Ein besonderer Vorteil dieses Moduls ist die Vernetzung mit anderen mathematischen Bereichen. So konnte ich Querverweise auf die Darstellende Geometrie, Projektive Geometrie, Komplexe Zahlen etc. vornehmen. Bei einem gekauften Lehrbuch wären solche Transfers heikel, weil der Autor die Voraussetzungen seiner Leserschaft nicht kennen kann.

- Wie das Beispiel zeigt, bemühe ich mich, die Texte wo möglich so zu gestalten, dass jede Seite selbst ein Modul ist und somit ein eigenes Thema darstellt.

Möglicherweise fällt Ihnen beim Anschauen die eine oder andere Verbesserungsmöglichkeit auf.
Mir geht das auch immer so, wenn ich ein früher hergestelltes Lehrmittel wieder hervor nehme. Normalerweise überarbeite ich jeden Text, bevor ich ihn wieder neu verwende. Selten bekommt eine Klasse wieder genau den gleichen Text wie die letzte Klasse.
Dies ist eine der Stärken meiner Eigenproduktionen: Sie sind zwar selten perfekt, aber sie "leben" und lassen sich für jede Klasse wieder individuell anpassen.

Unterdessen umfasst mein aktuelles, auf den CAS-Rechner ausgerichtetes Skript zur Matrizenrechnung über 140 Seiten …

# Affine Abbildungen

## Repetition

In der DG sind wir früher affinen Abbildungen begegnet. Von dort wissen wir noch, dass die Affinität fast die allgemeinste Abbildung ist, welche noch **eineindeutig** und **geradentreu** ist. Die einzige noch allgemeinere Abbildung mit diesen Eigenschaften ist die Kollineation.

Als **Spezialfälle von Affinitäten** haben wir kennengelernt (in absteigender Reihenfolge):

| | |
|---|---|
| Ähnlichkeiten | [ winkel- und verhältnistreu ] |
| Kongruenzen | [ längentreu ] |
| Gleichsinnige Kongruenzen | [ orientierungstreu ] |
| Translationen | [ richtungstreu ] |

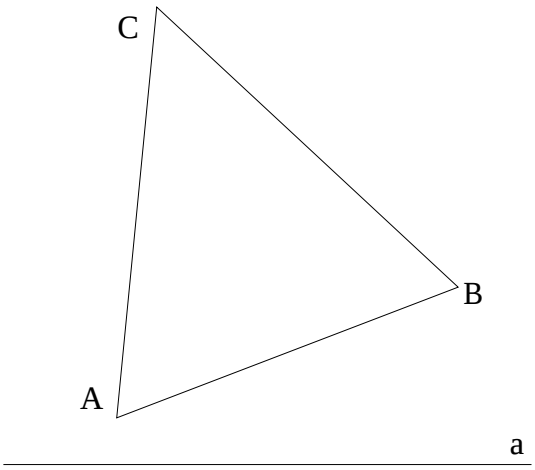
Die typischen **Eigenschaften der Affinitäten** sind

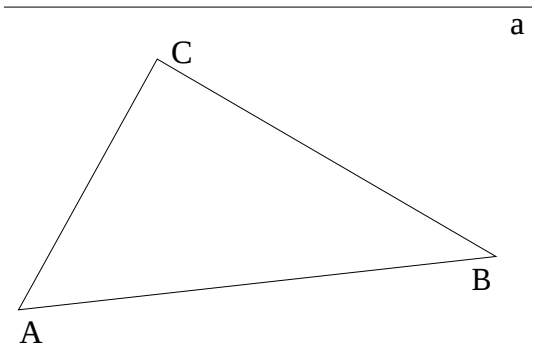
- Teilverhältnistreue und Parallelentreue
- Eineindeutigkeit und Geradentreue

Dabei heisst "teilverhältnistreu" konkret:

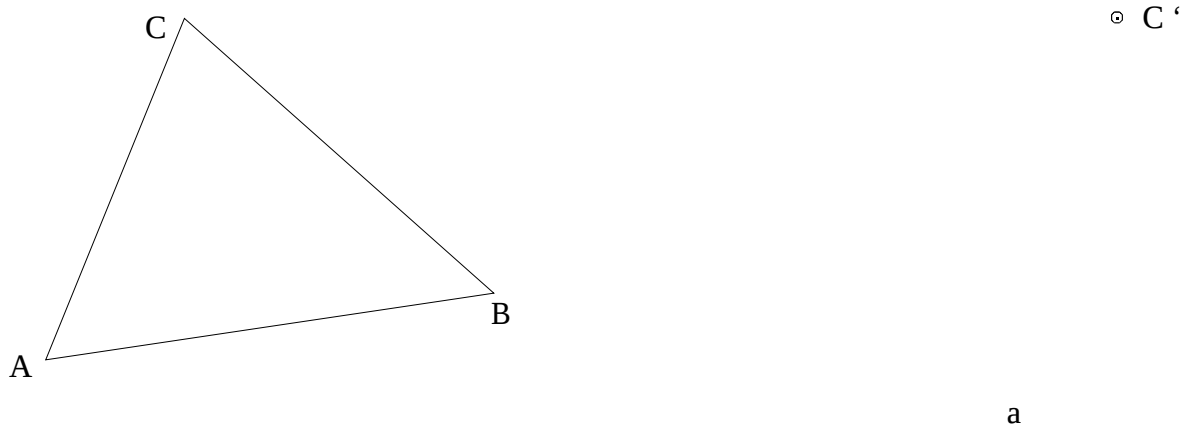
Teilverhältnis t von ABC: $\vec{AB} = t \cdot \vec{CB}$

<u>Beispiele</u>: Konstruiere je das perspektiv-affine Bild des Dreiecks ABC, wenn a die **Affinitätsachse** ist.
Bestimme je auch das **Affinitätsverhältnis** (ungefähr, durch Messen)



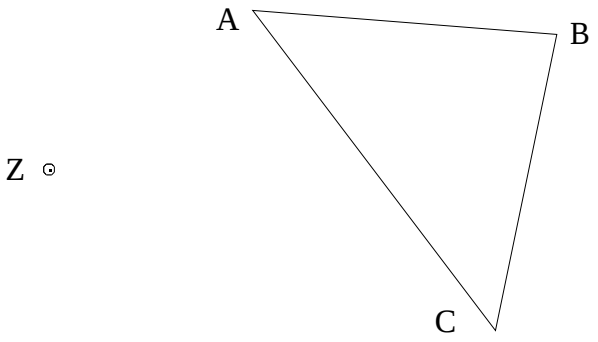




⊙ C ‘ ⊙ A ‘




Frage:
Ist die Translation auch eine perspektive Affinität?
Falls "ja": Was ist das spezielle daran?

Die Translation als Spezialfall einer zentrischen Streckung:
Konstruiere das Bild bei Streckung mit Zentrum Z und Faktor 2.5 und notiere den Zusammenhang mit der Translation.



# Analytische Darstellung affiner Abbildungen

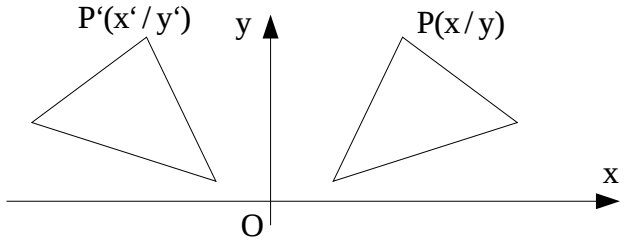
Zu jeder affinen Abbildung im Koordinatensystem können wir die zugehörigen Abbildungsgleichungen angeben.

Beispiele:

Spiegelung an der y-Achse:

x' =

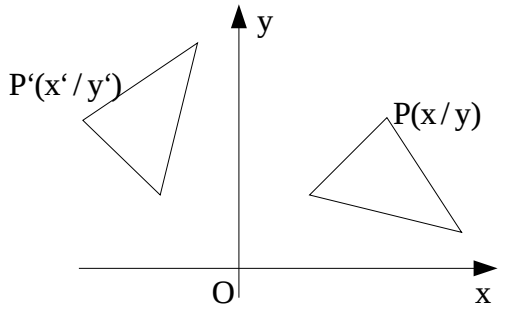
y' =




Drehung um den Ursprung mit 90°:

x' =

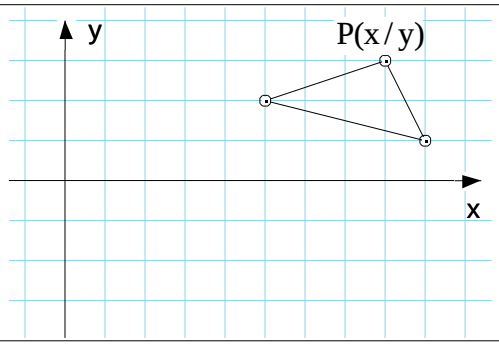
y' =




Perspektive Affinität mit Achse = x-Achse, Affinitätsverhältnis - 1 und Richtung der 1. Winkelhalbierenden (Schrägspiegelung):

x' =

y' =




Scherung mit Achse a = x-Achse und Scherungswinkel α :

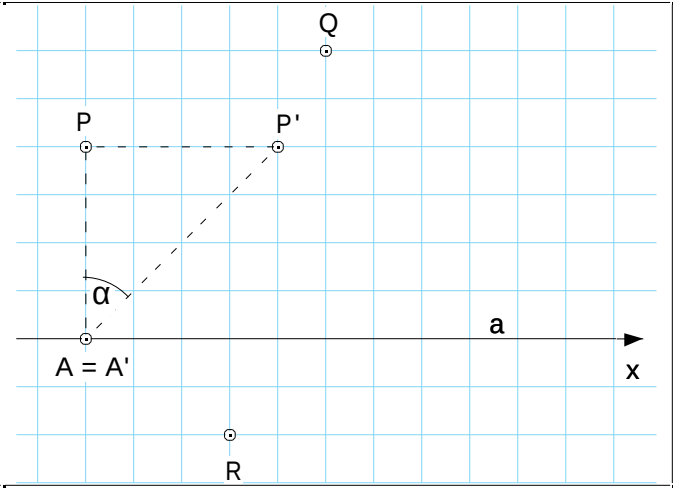
Unter Beachtung von

$$\frac{x' - x}{y} = \tan\alpha =: r \quad \text{(als Abkürzung)}$$

erhält man:

x' =

y' =



## Die Matrix - Schreibweise

Solche Abbildungsgleichungen lassen sich mit Matrizen vektoriell darstellen.

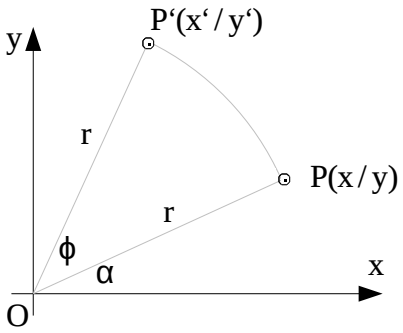
Lauten die Abbildungsgleichungen allgemein $\begin{aligned} x' &= a \cdot x + b \cdot y \\ y' &= c \cdot x + d \cdot y \end{aligned}$ ,

so führen wir für die Koeffizienten die **Matrix** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein und schreiben

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder mit Variablen: $\vec{r}' = A \cdot \vec{r}$ .

Wie man eine Matrix mit einem Vektor multipliziert, geht unmittelbar aus den obigen Gleichungen hervor: Das "Skalarprodukt" der ersten Matrixzeile mit dem Originalvektor ergibt die erste Komponente des Bildvektors; entsprechend mit der zweiten Zeile für die zweite Komponente des Bildvektors.

<u>Beispiel</u>:




**Drehung um den Nullpunkt** um Winkel $\phi$ .

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\alpha \\ y &= r \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(\alpha + \phi) = r \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\phi - \sin\alpha \cdot \sin\phi) \\ &= \cos\phi \cdot (r \cdot \cos\alpha) - \sin\phi \cdot (r \cdot \sin\alpha) \\ y' &= r \cdot \sin(\alpha + \phi) = r \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\phi + \sin\alpha \cdot \cos\phi) \\ &= \sin\phi \cdot (r \cdot \cos\alpha) + \cos\phi \cdot (r \cdot \sin\alpha) \end{aligned}$$

vereinfacht erhalten wir also

$$\begin{aligned} x' &= \cos\phi \cdot x - \sin\phi \cdot y \\ y' &= \sin\phi \cdot x + \cos\phi \cdot y \end{aligned}$$

bzw. $\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

Notiere die Abbildungsmatrix A fürs Zahlenbeispiel $\phi = 30°$: $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

Berechne damit die Bildpunkte des Dreiecks ABC und kontrolliere durch Konstruktion: A(1/1) B(5/3) C(4/-7)

## Matrizen bei linearen Gleichungssystemen

So weit bietet uns die Matrix erst eine andere Schreibweise für die Gleichung affiner Abbildungen. Bevor wir uns ihren genialen Vorteilen (z.B. für zusammengesetzte Abbildungen und die inverse Abbildung) zuwenden, wollen wir die Matrixschreibweise in einem anderen Zusammenhang kennenlernen:

Betrachten wir das **Gleichungssystem** $\left| \begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ 2x - 2y = -2 \end{array} \right|$ .

Mit der Matrixschreibweise können wir es so schreiben: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,

oder kurz $\boxed{A \cdot \vec{r} = \vec{c}}$ .

**Geometrische Interpretation** dieser Gleichung:

Gesucht ist ein (Original-) Vektor $\vec{r}$, der bei der Abbildung mit Matrix $A$ in den gegebenen Bildvektor $\vec{c}$ übergeht.

**Geometrische Lösungsidee** (unter der Voraussetzung, dass überhaupt eine Lösung existiert):

$$\begin{tikzcd} \vec{r} \arrow[r, bend left, "A"] & \vec{c} \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Dann muss bei der **inversen Abbildung** $A^{-1}$ der Bildvektor $\vec{c}$ in den (gesuchten) Originalvektor $\vec{r}$ übergehen: $\boxed{A^{-1} \cdot \vec{c} = \vec{r}}$

Die Matrix der inversen Abbildung nennt man die **inverse Matrix**.
Welche Eigenschaft muss eine inverse Matrix $A^{-1}$ bezüglich der Matrix $A$ haben?

Durch Einsetzen von $A \cdot \vec{r} = \vec{c}$ in die Gleichung $A^{-1} \cdot \vec{c} = \vec{r}$ folgt
$A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{r}) = \vec{r}$ , das heisst $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{r} = \vec{r}$ .

Wir wissen zwar noch gar nicht, <u>wie</u> man zwei Matrizen miteinander multiplizieren kann! In diesem Fall kennen wir aber bereits das Ergebnis:
$A^{-1} \cdot A$ muss die Matrix $\mathbb{1}$ der **Identität** geben, das heisst derjenigen Abbildung, welche jeden Punkt an seinem Ort lässt. $\boxed{A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} : \quad \vec{r} \longrightarrow \vec{r}}$

<u>Verständniskontrolle</u>: Notiere die **Matrix der Identität**: $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

## Multiplikation zweier Matrizen

Wir können jede quadratische Matrix als geometrische Abbildungsvorschrift interpretieren:

$A: \vec{r} \longrightarrow \vec{r}'$ und $B: \vec{r}' \longrightarrow \vec{r}''$

Damit ist $\vec{r}' = A \cdot \vec{r}$ und $\vec{r}'' = B \cdot \vec{r}' = B \cdot A \cdot \vec{r}$

Somit ist offensichtlich, dass das Matrizenprodukt wieder eine Matrix sein muss:

$B \cdot A = C$ und $C: \vec{r} \longrightarrow \vec{r}''$

### Wie multipliziert man die Matrizen konkret?

Mit einem Koeffizientenvergleich ist das schnell herausgefunden:

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Ansatz: $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \vec{r}' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{r}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ersetze beim letzten Vektor x' und y' durch die obendran gefundenen Terme:

$$\vec{r}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Andererseits erwarten wir, dass $C \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Der Koeffizientenvergleich liefert als <u>Ergebnis</u>:

$$\boxed{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} & b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} \\ b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} & b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} \end{pmatrix}}$$

Ergebnis in Zeile i und Spalte j ist das Skalarprodukt der Zeile i mit der Spalte j [ i, j {1,2} ] .

## Berechnungsbeispiele

1. Berechne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

2. Ist die Matrixmultiplikation kommutativ?

   Prüfe diese Frage am Beispiel $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

3. **Zusammensetzung zweier Ähnlichkeitsabbildungen**

   Eine Drehung um den Nullpunkt mit Winkel $\phi = 60°$ wird zusammengesetzt mit einer Streckung mit Zentrum O und Faktor $k = -2$ .
   Das Ergebnis ist eine **Drehstreckung**.

   Berechne die Matrix A der Drehung: $A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

   Notiere die Matrix B der Streckung: $B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

   Die Drehstreckung hat als Abbildungsmatrix C das Produkt: $C = B \cdot A$

   $B \cdot A = C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

   Bildpunkt von $P(u/v)$ ist damit $P' \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

   Kontrolliere dein Ergebnis, indem du es mit *komplexen Zahlen* nachrechnest.
   Als Erinnerung:
   Multipliziere den Originalvektor z (= $u + i \cdot v$) mit $k \cdot \text{cis}\,\phi$ !

---

1. $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$ ---> Die Multiplikation von Matrizen ist <u>nicht</u> kommutativ !

## Die Inverse einer Matrix

Beim linearen Gleichungssystem sind wir auf zwei Probleme gestossen. Das eine, die Matrixmultiplikation, haben wir unterdessen gelöst.
Mit etwas Ausdauer lässt sich auch die inverse Matrix ohne grosse Rechenkünste herleiten.

<u>Gegeben</u> ist eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

<u>Gesucht</u> ist die dazu inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$

Wir wissen: $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}$

In Komponenten lautet diese Gleichung $\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Multipliziere die linke Seite aus und vergleiche die vier erhaltenen Terme mit den vier Komponenten der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$. Du erhälst ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen für die vier Unbekannten u, v, w, z.
*Achte darauf, dass du die Gleichungen so darstellst, dass die gleichen Unbekannten immer untereinander stehen, damit du das Additionsverfahren bequem anwenden kannst:*

( Die Lösung steht auf dem nächsten Blatt )

## Die Determinante einer Matrix

Bei den gefundenen Ergebnissen fällt dir auf, dass der Term $D = ad - bc$ an verschiedenen Stellen auftaucht. Dieser Term ist die Determinante der Matrix A:

**Determinante** der Matrix A : $\text{Det } A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

Mit der Determinante lässt sich die Inverse einer Matrix einfacher darstellen:

Die **Inverse** der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

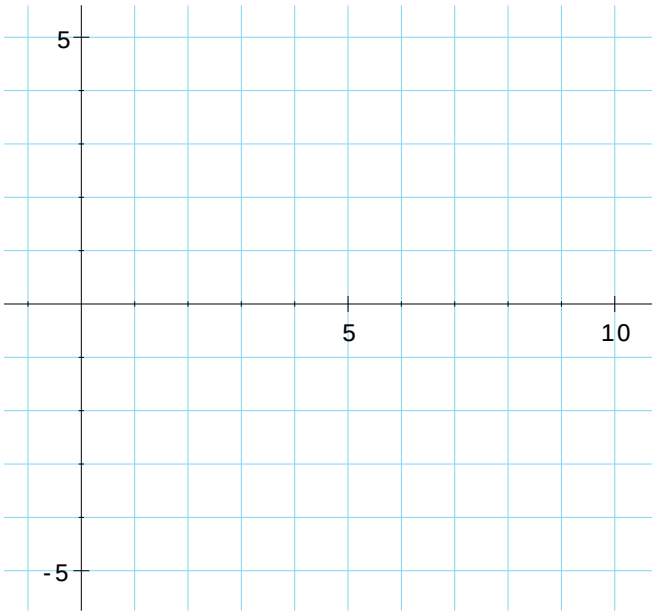
Wie wir sehen, besitzt eine Matrix A nur dann eine Inverse, falls ihre Determinante ungleich Null ist !

Dies ist auch geometrisch sinnvoll:
Wie wir später erkennen werden, ist nämlich die Determinante nichts anderes als das Affinitätsverhältnis $\lambda$ derjenigen Affinität, welche durch die Matrix A dargestellt wird. Von früher her (DG) wissen wir aber, dass Flächeninhalte von Figuren bei einer affinen Abbildung mit dem Betrag des Affinitätsverhältnisses multipliziert werden. Damit ist aber auch klar, dass die Umkehrabbildung $A^{-1}$ der Affinität das Affinitätsverhältnis $\frac{1}{\lambda}$ haben muss! Ist $\lambda = 0$, so geht das nicht: Wenn der Flächeninhalt der Bildfigur gleich Null ist, so gibt es keine Zahl, welche mit 0 multipliziert den ursprünglichen Flächeninhalt der Originalfigur zurück liefert.

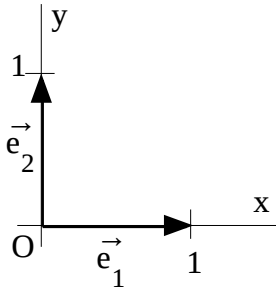
Eine Affinität A ist nur **umkehrbar**, falls $\lambda = \text{Det } A \neq 0$ ist !

<u>Übung</u> (Schrägspiegelung) :
Eine Affinität hat die Abbildungsmatrix A $= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechne das Bild des Dreiecks P(6/1) Q(8/2) R(7/5).
Berechne die Matrix $A^{-1}$ der Umkehrabbildung und kontrolliere dann, wie die Bildpunkte mit $A^{-1}$ wieder auf die Originalpunkte abgebildet werden.



## Affine Transformation




Jeder Vektor lässt sich als Linearkombination der Einheitsvektoren darstellen.
So bedeutet zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u \cdot \vec{e}_1 + v \cdot \vec{e}_2$$

Was passiert nun bei der affinen Abbildung, dargestellt durch eine Matrix A, genau?

Betrachten wir die Bilder der Einheitsvektoren bei der Abbildung $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

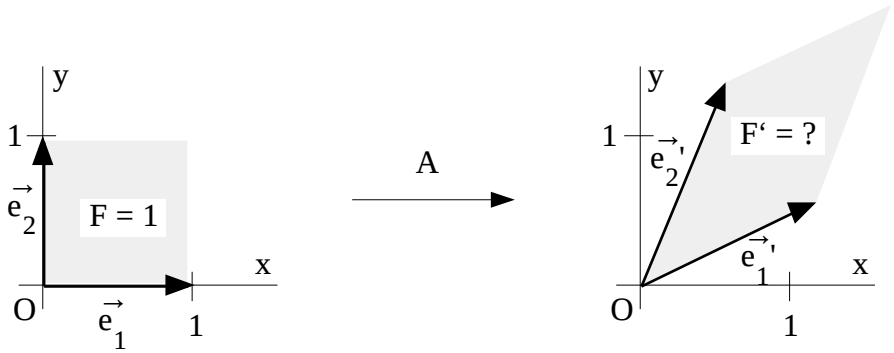
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \vec{e}_1' \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \vec{e}_2'$$

| |
|---|
| Das heisst, die Kolonnen der Abbildungsmatrix sind die Bilder der Einheitsvektoren ! |

Das Bild des Vektors $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,u + b\,v \\ c\,u + d\,v \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = u \cdot \vec{e}_1' + v \cdot \vec{e}_2'$$

Für den Vergleich der Flächeninhalte einer Originalfigur und ihrer Bildfigur genügt es deshalb, die Abbildung des Einheitsquadrates zu betrachten:




Um F' (Fläche eines Parallelogramms) zu berechnen, nehmen wir das Vektorprodukt der Bilder der Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_1' \times \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\,d - b\,c \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad F' = \left| ad - bc \right| = \left| ad - bc \right| \cdot F = \left| \text{Det } A \right| \cdot F$$

<u>Folgerungen</u>: (auf der letzten Seite bereits gebraucht)

- Multipliziert man den Flächeninhalt der Originalfigur mit $\left| \text{Det } A \right|$, so erhält man den Inhalt der Bildfigur.
- Die **Determinante** Det A der Abbildungsmatrix A ist das **Affinitätsverhältnis**: Det A = $\lambda$

## Lösung des linearen Gleichungssystems

Kommen wir zurück zum früher betrachteten Gleichungssystem :

$$\left|\begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ 2x - 2y = -2 \end{array}\right| \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A \cdot \vec{r} = \vec{c}$$

Multiplizieren wir beide Seiten von links mit $A^{-1}$, so erhalten wir direkt die Lösung:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{r} = 1 \cdot \vec{r} = \vec{r} = A^{-1} \cdot \vec{c}$$

Für die Inverse der Matrix A berechnen wir zuerst $\text{Det } A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$

Somit ist $A^{-1} = \frac{\quad}{\quad} \cdot \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

### Die allgemeine Lösung eines 2 × 2 - Gleichungssystems

$$\left|\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}\right| \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ist $\text{Det } A = a_1 b_2 - b_1 a_2$

Als Lösung ergibt sich daraus, falls die Determinante nicht Null ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{array}$$

Bequemer lässt sich dies mit Determinanten schreiben (Cramersche Regel):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{falls } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Kontrolle</u>:
Löse das allgemeine Gleichungssystem auf konventionelle Art (mindestens für eine der beiden Unbekannten) und bestätige damit die gefundenen Formeln!

## Ausblick

Wir haben nun einiges über quadratische $2 \times 2$ - Matrizen kennengelernt. Selbstverständlich könnte man die gewonnenen Erkenntnisse auch auf höhere Dimensionen ausbauen.

Zum Beispiel werden räumliche Affinitäten durch $3 \times 3$ - Matrizen dargestellt.

Die Matrix einer Drehung um die z-Achse mit Winkel $\phi$ zum Beispiel sieht so aus (darauf hättest du übrigens auch selbst kommen können !) :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante einer $3 \times 3$ - Matrix berechnet sich folgendermassen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Det } A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Aus dem Zusammenhang mit Gleichungssystemen können wir uns gut noch viel grössere Matrizen vorstellen, welche geometrisch interpretiert Abbildungen von n-dimensionalen Vektoren darstellen.
Jede quadratische Matrix, deren Determinante nicht Null ist, besitzt eine Inverse.

<u>Übung</u>:

1. Berechne das Bild des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bei der Abbildung $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Bilde das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ?$

---

1. $\begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 17 & 18 & 16 \\ 1 & 7 & 7 \\ 7 & -11 & -23 \end{pmatrix}$

# Eine Anwendung zur Polynom - Division

3b 2004

Du weisst bereits:

| Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren gleich Null ist. |
|---|

**Beispiel:** Notiere alle Lösungen von $(x - 4) \cdot (3 - 7x) \cdot x \cdot (2 + x) = 0$

**Anwendung 1:**
Bei quadratischen Gleichungen kannst du eine Faktorzerlegung machen.

$x^2 - 3x - 40 = 0 \qquad x = ?$

**Aufgabe:** Notiere eine Gleichung, welche die Lösungen 5 , 6 , 7 hat.

**Anwendung 2:**
Bei "noch komplizierteren" Gleichungen dürfte dir die Faktorzerlegung oft schwer fallen. Vielleicht gelingt es dir dann aber, eine der Lösungen zu *erraten*.

Nehmen wir an, die Gleichung heisse $T(x) = 0$ . Dabei ist $T(x)$ irgend ein Term .
Durch Raten hast du eine Lösung $x = 5$ herausgefunden.
Wie heisst in diesem Fall einer der Faktoren vom Term $T(x)$ ?
Hilft dir das, um die Originalgleichung zu vereinfachen ?

Falls du den Zusammenhang erkannt hast, kannst du jetzt bestimmt folgendes **Beispiel** lösen: $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$ Raten ergibt: $x_1 = -\frac{3}{2}$
Wie lauten die übrigen Lösungen ? (Wieviele sind zu erwarten?)

Nun kannst du auch folgende **Frage** beantworten:
Wieviele Lösungen hat die Gleichung $a \cdot x^{27} - b \cdot x^{26} + \ldots = 0$ ? Warum ?

Wenn du nun die Gleichung $0 = x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 12x$ allein lösen kannst, hast du die Anwendung zur Polynomdivision verstanden. Finde zuerst zwei der Lösungen mit "Raten".

**Übungen:**

1. $x^3 + 10x^2 - 13x - 22 = 0$
2. $x^4 - 50x^2 + 625 = 0$
3. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
4. $x^5 + x^4 - 11x^3 - 15x^2 + 24x + 36 = 0$ Hinweis: $x_1 = x_2 = -2$

# Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme lassen sich auf verschiedene Arten einführen.

Eine Variante, das Thema schülerzentriert zu behandeln, ist das entsprechende von der ETH publizierte Leitprogramm
(vgl. http://www.educeth.ethz.ch/mathematik ).

Ich habe dieses auch einmal mit einer Klasse ausprobiert. Meine Erfahrungen:

Vorteile:
- sehr ausführlich
- zahlreiche höchst interessante Anwendungen und Querverweise
- ist grafisch sehr attraktiv gestaltet und didaktisch ausgefeilt
- kann ohne eigene Vorbereitungsarbeit eingesetzt werden!
  Mit bloss etwas Kopieraufwand können zahlreiche Lektionen "bestritten" werden.

Nachteile:
- braucht *sehr* viel Papier / Kopien
- an Selbstständigkeit gewöhnte Schüler/innen langweilen sich teilweise durch die extreme Ausführlichkeit
- das bekannte (und meiner Meinung nach praktischste) Additionsverfahren wird nicht besprochen
- hoher Zeitbedarf

Ich setzte mir danach das Ziel, das gleiche Thema mit einem deutlich kleineren Aufwand an Lektionen mit gleich gutem Lernerfolg zu vermitteln (selbstverständlich musste ich dabei viele interessante Anwendungen weglassen).
Dabei entstand der vorliegende Modul.

**Zum beiliegenden Lehrmittel** :

Mit den beiliegenden Blättern sollen die Lernenden eine *Einführung* in die Thematik "Gleichungssystem" erhalten. Sie sollen danach in der Lage sein, ein "normales" Gleichungssystem selbst zu lösen.
Der Modul ist so aufgebaut, dass es *keinen* Lehrerbeitrag an der Wandtafel braucht. Die Lernenden arbeiten in ihrem eigenen Tempo und holen jeweils das nächste Blatt, wenn sie das aktuelle fertig bearbeitet und ihre Arbeit mit der aufliegenden Musterlösung verglichen haben.
Das Gelernte muss anschliessend durch Übungen aus dem Buch vertieft werden.
Weitere Aspekte wie nichtlineare Systeme, "Substitutions"-Probleme, Systeme mit Parametern, Textaufgaben etc. können nach Bedarf zusätzlich unterrichtet werden.

| | | |
|---|---|---|
| Problem: | $\begin{vmatrix} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{vmatrix}$ | $(x / y) = ?$ |

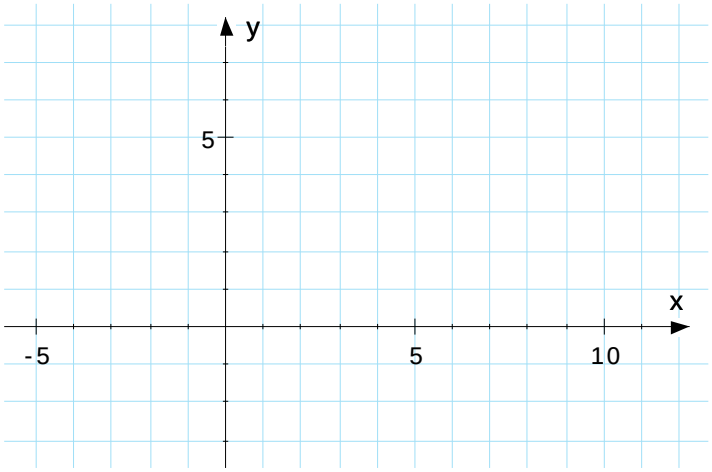
Ein Gleichungs-System besteht aus mehreren Gleichungen, deren gemeinsame Lösungsmenge gesucht ist. Dabei ist die Lösungsmenge des Systems die Schnittmenge der Lösungsmengen aller einzelnen Gleichungen.

Wir beschränken uns vorerst auf Systeme von <u>linearen</u> Gleichungen, welche <u>gleich viele</u> Unbekannte wie Gleichungen enthalten.

Es gibt verschiedene Verfahren (Algorithmen), um Gleichungssysteme zu lösen. Alle diese Verfahren haben das gemeinsame Ziel, die Anzahl der Unbekannten Schritt um Schritt zu verkleinern, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist.

<u>Beispiel</u> (für 1. bis 3.) : $\begin{vmatrix} 2x - 3y = -3 \\ 4x + 3y = 36 \end{vmatrix}$

1. Naheliegend ist sicher das **grafische Lösungsverfahren**: Beide Gleichungen beschreiben Geraden im Koordinatensystem. Zeichne die beiden Geraden ein und ermittle so die Lösung aus den Koordinaten des Schnittpunktes.




Die Nachteile dieser Methode liegen sicher auf der Hand. Notiere sie hier:

---

1. Nachteile sind in erster Linie die fehlende Genauigkeit. Bei nicht-ganzzahligen Lösungen ist es nicht einmal bei sehr exakter Arbeitsweise möglich, eine genaue Lösung zu bekommen. Ausserdem ist es umständlich, die Grafik zu zeichnen.
Immerhin kann man mit dieser Methode gut abschätzen, ob eine algebraisch gefundene Lösung stimmen kann oder nicht.

2. Das **Gleichsetzungsverfahren** ist nun ebenfalls naheliegend:
   Löse beide Gleichungen nach der gleichen Unbekannten auf und setze die erhaltenen Terme einander gleich.
   Damit *reduzierst* du die *Anzahl der Unbekannten* um eine und bekommst eine lösbare Gleichung. Finde so die Lösung algebraisch:

3. Das **Substitutionsverfahren** (oder auf deutsch: das Einsetzungsverfahren).
   Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst, zum Beispiel nach $x$. Der erhaltene Term wird bei der anderen Gleichung überall dort eingesetzt, wo $x$ steht.
   Damit ist wiederum *eine Unbekannte eliminiert*.

Die beiden zuletzt beschriebenen Methoden eignen sich für viele Typen von Gleichungssystemen. Für Systeme von **linearen** Gleichungen kennen wir allerdings eine weitere wesentlich praktischere Methode:

## 4. Das **Additionsverfahren** für <u>lineare</u> Gleichungssysteme

Dem Additionsvervahren liegt zu Grunde, dass sich an der Lösungsmenge nichts ändert,

- wenn man beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl ($\neq 0$) multipliziert
- auf beiden Seiten der Gleichung gleich viel addiert.

Insbesondere kann man auch zwei Gleichungen addieren!

Gilt nämlich $\left| \begin{array}{l} A = B \\ C = D \end{array} \right|$ , so ist wegen $C = D$ auch $A + C = B + D$ !

*Lies erst weiter, wenn du das wirklich verstanden hast!*

---

2 . Das Gleichsetzungsverfahren ist meistens ebenfalls zu umständlich für die Praxis.

3 . Das Substitutionsverfahren ist grundsätzlich eine geeignete Methode, die bei vielen Gleichungssystemen zum Ziel führt. Sie erweist sich in der Praxis aber oft als rechnerisch aufwändig.

4 . Bei linearen Gleichungssystemen wenden wir in der Regel meistens das Additionsverfahren an, da es am wenigsten Rechenarbeit erfordert und schnell zur Lösung führt.

5. Beispiel zum Additionsverfahren: $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = -3 \\ 4x + 3y = 36 \end{array} \right|$

Addiere die beiden Gleichungen und finde so die Lösung!

6. Noch bequemer geht's für "beliebige" Systeme mit deinem **Algebrarechner TI-89**. Notiere jeweils die Antwort des Rechners und interpretiere diese:

<u>Variante 1</u>: Solve(2x-3y=-3 and 4x+3y=36 , {x,y})

<u>Variante 2</u>: Bringe dazu beide Gleichungen zuerst auf "Nullform".
Zeros({2x-3y+3, 4x+3y-36} , {x,y})

<u>Kontrolle</u> der Lösung mit dem Rechner:
2x-3y=-3 and 4x+3y=36 | x=11/2 and y=14/3

Was würde der Rechner im Fall einer falschen Lösung antworten?

<u>Übungen</u> zum Lösen mit dem Rechner:

a) $\left| \begin{array}{l} 7x - 8y = 22 \\ 5x + 12y = -2 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} x + 2ay = 1 \\ 3x + 4ay = 0 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 3b^2x^2 = 4a^2by \\ \frac{bx}{2} = \frac{ay}{3} \end{array} \right|$

---

5 . Wenn du x gefunden hast, kannst du seinen Wert in einer der Gleichungen einsetzen um eine Gleichung für y zu erhalten.
Du kannst aber auch y direkt berechnen mit dem Additionsverfahren: Multipliziere die erste Gleichung mit (-2) und addiere die Gleichungen dann .....

6 . Trotz des Komforts unseres Rechnes solltest du die meisten Systeme auch von Hand lösen können!!

Zurück zum Additionsverfahren:

7. Neues Beispiel:
   Multipliziere vor dem Addieren
   - die erste Gleichung mit 3 und die zweite mit 2, um y zu eliminieren
   - die erste Gleichung mit 5 und die zweite mit (-7), um x zu eliminieren:

$$\left|\begin{array}{rcrcr|c|c} 7x & - & 8y & = & 22 & \cdot 3 & \cdot 5 \\ 5x & + & 12y & = & -2 & \cdot 2 & \cdot(-7) \end{array}\right.$$

8. Mit etwas Übung gelingt es dir auch, die Vielfachen der Gleichungen direkt zu addieren, ohne diese Vielfachen zuerst zu notieren. Versuch's hier einmal:

$$\left|\begin{array}{rcrcr|c|c} 9x & + & 7y & = & 8 & \cdot 5 & \cdot 11 \\ 15x & + & 11y & = & 13 & \cdot(-3) & \cdot(-7) \end{array}\right.$$

---

7. Die Lösung ist $(x/y) = (2/-1)$
   **Wichtig**: Wie könntest du übrigens die Lösung selbst kontrollieren? ("nochmals rechnen" ist zwar keine falsche, aber auch keine gute Methode dafür!)
8. **Überlege dir spätestens jetzt**, mit welchen Zahlen du (im allgemeinen Fall) die einzelnen Gleichungen multiplizieren musst, damit anschliessende Addition eine Unbekannte eliminiert!

## Lösbarkeit eines linearen $2 \times 2$ - Gleichungssystems

9. Wie uns die bisherige Erfahrung zeigt, ist der **Normalfall** bei einem linearen Gleichungssystem mit zwei Unbekannten der, dass es genau eine Lösung gibt. Wieso?

10. Wenn du die letzte Frage wirklich beantwortet hast, weisst du nun auch, dass bezüglich der Lösungsmenge zwei weitere Fälle als Spezialfälle ebenfalls denkbar sind. Nämlich:

11. Verständniskontrolle:
    Erfinde je ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, welches
    a) keine Lösung besitzt
    b) unendlich viele Lösungen besitzt.
    c) Was antwortet übrigens der Algebrarechner auf solche Systeme?

12. Notiere nun eine Regel für das allgemeine lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, welche sagt, ob es genau eine Lösung gibt oder ob ein Spezialfall vorliegt: $\left| \begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \right|$

---

9. Die Antwort fällt dir bestimmt leicht, wenn du dir überlegst, welches die geometrische Interpretation eines solchen Gleichungssystems ist.
10. Die Lösungsmenge kann leer sein oder unendlich viele Elemente enthalten. Begründung: Geometrische Darstellung der beiden Gleichungen ! ( Nämlich ? )
11. Die beiden entsprechenden Geraden müssen parallel bzw. zusammenfallend sein. Im letzteren Fall besteht die Lösungsmenge aus den Koordinaten aller Punkte dieser Geraden.
12. Tip: Berechne dazu die Steigungen der beiden entsprechenden Geraden. Antwort:
    $ad = bc \Leftrightarrow$ keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. $ad \neq bc \Leftrightarrow$ genau eine Lösung.

## Grössere lineare Gleichungssysteme

Liegen drei Gleichungen mit drei Unbekannten vor, so eliminieren wir in einem ersten Schritt eine Unbekannte. So erhalten wir ein neues System, welches nur noch zwei Gleichungen und zwei Unbekannte enthält. Dieses lösen wir "wie gehabt".

<u>Beispiel</u> *(rechne jeden Schritt nach!)*

$$\left|\begin{array}{l} 3x + 4y - 16z = 0 \\ 5x - 8y + 10z = 0 \\ 2x + 6y + 7z = 52 \end{array}\right|$$

1. Schritt: y eliminieren:

$$\left|\begin{array}{l} 3x + 4y - 16z = 0 \\ 5x - 8y + 10z = 0 \\ 2x + 6y + 7z = 52 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \\ \cdot(-2) \end{array}\right.$$

dies ergibt

$$\left|\begin{array}{l} 11x - 22z = 0 \\ 5x - 62z = -104 \end{array}\right|$$

2. Schritt: x eliminieren:

$$\left|\begin{array}{l} 11x - 22z = 0 \\ 5x - 62z = -104 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-11) \end{array}$$

dies ergibt $(-110 + 11 \cdot 62)\, z = 11 \cdot 104$

bzw. $572\, z = 1144$

d.h. $z = 2$

3. Schritt: Lösungen berechnen (durch "rückwärts einsetzen").

Wir setzen den Wert von z in einer Gleichung des 2. Schrittes ein:

$$11x - 22 \cdot 2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 4$$

Die beiden Werte in einer der Originalgleichungen einsetzen:

$$3 \cdot 4 + 4y - 16 \cdot 2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 4y = 20 \quad \longrightarrow \quad y = 5$$

Somit besitzt das Gleichungssystem die eindeutige **Lösung (x/y/z) = (4/5/2)** .

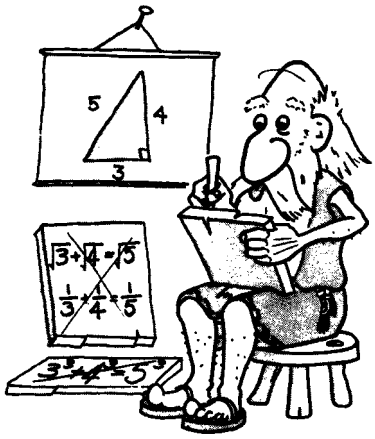
Entsprechend gehen wir vor bei noch grösseren Systemen:
Haben wir zum Beispiel vier Gleichungen mit vier Unbekannten, so eliminieren wir im ersten Schritt (drei Mal) eine Unbekannte. Es resultiert ein System mit drei Gleichungen und Unbekannten. Dieses wird wie oben gelöst.

**Mathematik** Löse möglichst alles ohne "Solver" und andere Programme ! Serie 4

Training und Repetition *Medizin gegen das Vergessen* 4e / bis 8.11. 00

---

1. Finde alle Lösungen der Gleichung *(ausnahmsweise) mit dem Algebrarechner* !
   $x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x = 0$




2. Vereinfache $\left(\sqrt{5 \cdot \sqrt{5}}\ \sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}$

3. $\frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \left(\frac{x}{x + y} + \frac{x}{x - y}\right) = ?$

4. Bestimme x aus $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x} = \sqrt{4x + 3} - \sqrt{x}$

5. Die Halbierende des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks teilt die Hypotenuse in zwei Stücke der Längen 5 und 12.
   Berechne daraus die Längen der beiden Katheten exakt!

6. Inserat in einer Computerzeitschrift:
   PowerBook G3 zu 5798 DM. Leasingrate 175 DM bei 43 Monaten Laufzeit.
   Welcher Jahreszins wird hier verlangt? *(Solver gestattet)*

7. Gegeben ist ein Dreieck A(3/2) B(9/4) C(10/11).
   Bestimme <u>durch Rechnung</u> (keine Konstruktion!)
   a) die Koordinaten des Höhenfusspunktes $H_c$
   b) die Höhe $h_c = \overline{CH_c}$ und den Flächeninhalt des Dreiecks.

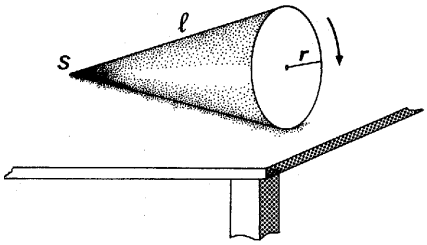
8. Löse auf dem Papier (ohne Grafikprogramm): $\frac{x - 2}{x - 4} < \frac{6 - x}{8 - x}$

9. 71.1% der Erdoberfläche besteht aus Meeren. Wieviele Liter Wasser ergibt dies, wenn man von von einer durchschnittlichen Meerestiefe von 5 km ausgeht?
   Verwende:
   Kugeloberfläche = $4\pi r^2$; Kugelvolumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$; Erdradius $r \approx 6.378 \cdot 10^6$ m.

10. Ein Wasserbecken kann durch eine Zuleitung in 10 Stunden gefüllt werden. Diese Zuleitung wird um 9.00 Uhr geöffnet. Um 11.30 Uhr wird zusätzlich eine zweite Zuleitung geöffnet, so dass das Becken schon um 16.00 Uhr voll ist.
    Wie lange hätte die zweite Zuleitung allein, um das Becken zu füllen ?

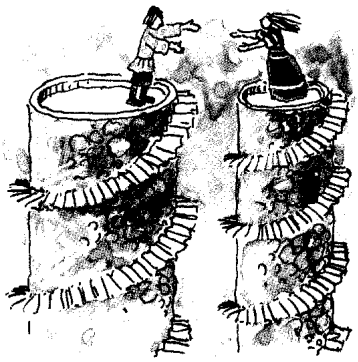
11. Wieviele fünfstellige natürliche Zahlen haben in ihrer Dezimaldarstellung mindestens zwei gleiche Ziffern ? (Anm. 355 = 00355 ist auch "fünfstellig")
    Um die Aufgabe "auf dem Papier" zu lösen, fehlt dir noch das Thema "Kombinatorik", welches wir im Unterricht erst später behandeln werden. Löse deshalb das Problem zum Beispiel, indem du ein kleines Computer-Programm dafür schreibst (gib das Programm-Listing auch ab!).
    Falls du das Problem rein mathematisch (ohne Programm) lösen kannst, so ist dies natürlich auch eine tolle Leistung!

1. Ein gerader Kreiskegel rollt auf einer horizontalen Ebene.
   a) Beschreibe seine Bewegung.
   b) Was lässt sich über seinen halben Öffnungswinkel sagen, wenn er nach genau zwei Drehungen um seine Achse wieder in die Ausgangslage zurückkehrt?




2. *Warum nicht einmal interdisziplinär?*

   **Smooth ascent**. Two circular towers are the same height but have different diameters. A spiral staircase runs around each of the towers from top to bottom. The slopes of the staircases are identical and constant. Which staircase is longer?



3. Dem Deckkreis eines Zylinders mit Radius $r$ und Höhe $h$ wird eine Halbkugel mit Radius $R$ konzentrisch aufgeklebt.
   a) $R = 3r$: Drücke die Oberfläche $S$ und das Volumen $V$ dieses "Pilzes" durch $r$ und $h$ aus.
   b) $R = x \cdot r$: Für welchen Wert von $x$ ist das Verhältnis $V : S$ unabhängig von $h$? Wie gross ist dann dieses Verhältnis?

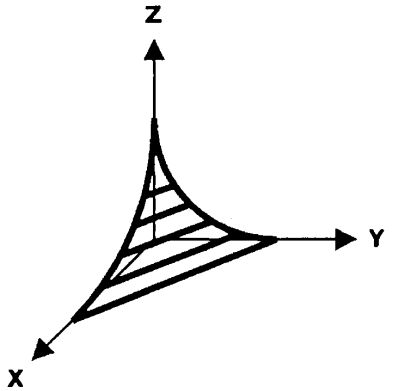
4. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
   a) Beschreibe mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren die geometrische Wirkung von $A$.
   b) Betrachtet wird ein beliebiger Spat, dessen Kantenrichtungen durch drei linear unabhängige Eigenvektoren bestimmt werden. Sein Volumen ist $V$. Dieser Spat wird durch die Matrix $A$ abgebildet. Es entsteht ein Spat mit dem Volumen $V'$. Bestimme $V':V$.

5. Wir betrachten den Flug einer Raumfähre mit den vereinfachenden Annahmen: konstante Geschwindigkeit und Flugbahn = Gerade. Der Mittelpunkt der Erde sei der Nullpunkt des Koordinatensystems, die Erdachse die z-Achse.
   a) Die Raumfähre wird auf dem Äquator im Punkt (6370 km / 0 / 0) gestartet. Sie fliegt in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Berechne den Punkt $A$, in dem die Atmosphäre durchstossen wird (Dicke der Atmosphäre = 10'000 km). Wann wird diese durchstossen, wenn der Betrag des Vektors $\vec{v}$ der Geschwindigkeit der Raumfähre in km / s entspricht?

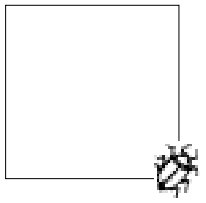
b) Berechne den Abstand, den die Raumfähre im Punkt A von der Bahnebene eines GPS-Satelliten hat, die durch die x-Achse geht und um 30° gegenüber der Erdachse geneigt ist.

c) Wie nahe kommt die Raumfähre dem geostationären Wettersatelliten M, der sich im Punkt M(9000 / 20'000 / 35'000) befindet?

6. Der rechts skizzierte Körper ist begrenzt durch die Koordinatenebenen und durch Strecken parallel zur xy-Ebene. Die Endpunkte dieser Strecken liegen auf Viertelskreisen mit dem Radius R.
Bestimme das Volumen des Körpers.



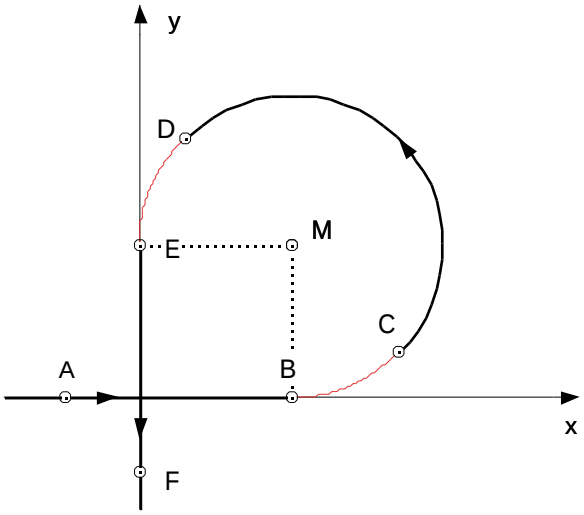

7. Ein Käfer macht eine Irrfahrt auf den Kanten eines Quadrates. Er startet in einer Ecke und entscheidet bei jeder Ecke zufällig (z.B. durch Münzwurf mit einer "guten" Münze), auf welcher Kante er weiter wandert.
Wieviele Kanten legt er durchschnittlich zurück, bis er alle vier Seiten des Quadrats durchwandert hat?



8. Zwei Autobahnen kreuzen sich rechtwinklig. Um ein Rechtsabbiegen (ABCDEF) zu ermöglichen, wird ein so genanntes **Kleeblatt** gebaut. Dabei ist das Strassenstück von C nach D ein zur Winkelhalbierenden (y = x) symmetrisch liegender Halbkreis mit Zentrum M(1 / 1) und Radius = 1 .

a) Berechne die Koord. des Punktes C .

Tipp: Speichere die x-Koordinate von C im Rechner ab.




b) Berechne die Gleichung eines *geeigneten* Polynoms f , dessen Graph das Kurvenstück von B nach C darstellt. "Geeignet" heisst, dass an den Übergangsstellen B und C die Richtungen und Krümmungen der zusammentreffenden Kurvenstücke übereinstimmen.
Die Lösung wird *exakt* erwartet.

Tipp: Speichere den Ansatz von f sowie die Ableitungen davon im Rechner ab, damit du das berechnete Gleichungssystem sinnvoll lösen lassen kannst.